



Dérivabilité & Convexité d'une fonction

Cours, méthodes, exemples et démonstrations

1 Dérivation

1.1 Dérivabilité en un point a

Définition

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à I .

On dit que f est *dérivable* en a si :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

est une limite réelle finie ℓ .

ℓ est alors appelé le nombre dérivé de f en a , et on le note $f'(a)$.

Par extension, on dit que f est *dérivable sur I* si f est dérivable en tout point a de I . La fonction $f' : x \mapsto f'(x)$ est alors appelée *fonction dérivée* de f .

1.2 Dérivabilité et continuité

Propriété

Si f est une fonction définie et dérivable en a alors elle est continue en a .

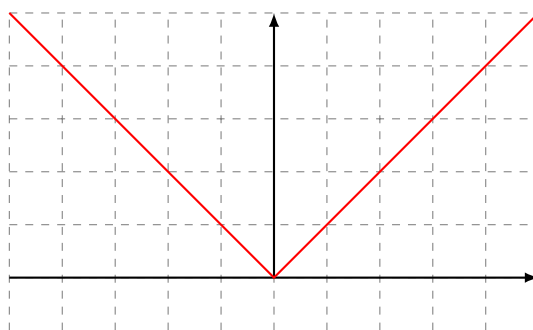


La réciproque de ce théorème est fausse : une fonction peut être continue sans être dérivable.

Exemple

La fonction $f : x \mapsto |x|$ est continue en 0, mais pas dérivable en 0 car :

.....
.....





1.3 Règles de dérivation

Propriété

Dérivation d'une fonction composée : Soit u et v deux fonctions (vérifiant les conditions de définition requises) dérivables de dérivées respectives u et v , alors la fonction $f = v \circ u$ est dérivable et sa dérivée s'écrit :

$$f'(x) = (u \circ v)'(x) = u'(x) \times v'[u(x)].$$

Exemple

On considère les deux fonctions définies par $u(x) = 2x^2 - 3$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

Propriété

- Si v et u sont de même monotonie, autrement dit toutes les deux croissantes ou toutes les deux décroissantes, alors la fonction $v \circ u$ est croissante.
- Si v et u sont de monotonie contraire, autrement dit l'une croissante et l'autre décroissante, alors la fonction $v \circ u$ est décroissante.

Démonstration

Exemple

On considère les deux fonctions u et v définies respectivement par $u(x) = 2x - 3$ et $v(x) = \frac{1}{x}$.



En général, $u \circ v \neq v \circ u$. On dit que la composée de fonctions n'est pas commutative.



Propriété

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .

Fonction	Dérivée	Condition
u^2	$2u'u$	
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$	$u(x) \neq 0$ sur I
e^u	$u'e^u$	
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u(x) > 0$ sur I
u^n	$nu'u^{n-1}$	
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$	$u(x) > 0$ sur I
$\sin(u)$	$u' \times \cos(u)$	
$\cos(u)$	$-u' \times \sin(u)$	

Exemple

Soit $f(x) = e^{x^2}$.

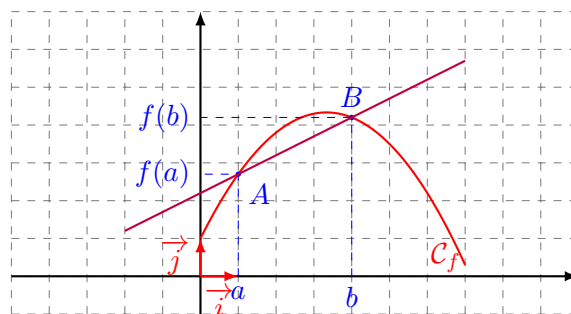
.....

2 Convexité d'une fonction

2.1 Fonction concave, fonction convexe

Définition

Soit f une fonction et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé. Soit A et B deux points de $\mathcal{C}_f$ alors la droite (AB) est appelée sécante de $\mathcal{C}_f$.



Définition

Soit f une fonction et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé. On dit que :

- f est convexe sur un intervalle I si, pour tout réel x de I , $\mathcal{C}_f$ est en dessous de ses sécantes.
- f est concave sur un intervalle I si, pour tout réel x de I , $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses sécantes.



Exemples

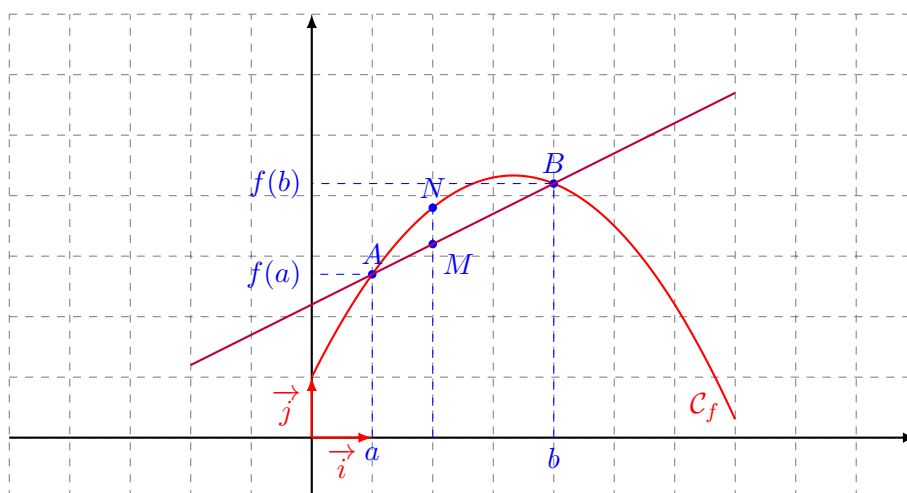
- La fonction carré est
- La fonction racine carrée

Propriété

- Si f est une fonction convexe sur un intervalle I alors pour tous réels x et y de I et pour tout $t \in [0; 1]$ on a : $f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$.
- Si f est une fonction concave sur un intervalle I alors pour tous réels x et y de I et pour tout $t \in [0; 1]$ on a : $f(tx + (1 - t)y) \geq tf(x) + (1 - t)f(y)$.

Démonstration

Soit deux réels a et b et soit t un réel de $[0; 1]$. On considère les deux points $A(a; f(a))$ et $B(b; f(b))$ appartenant à la courbe représentative de f .



Alors le point $M(ta + (1 - t)b, tf(a) + (1 - t)f(b))$ appartient au segment $[AB]$, une portion de la sécante de C_f .

f étant concave, cette sécante est située en dessous de C_f sur $[a; b]$. M est donc situé en dessous du point $N(ta + (1 - t)b, f(ta + (1 - t)b))$. D'où $f(ta + (1 - t)b) \geq tf(a) + (1 - t)f(b)$.

Propriété

f est convexe sur I si et seulement si $-f$ est concave sur I .

Exemple

La fonction $x \rightarrow x^2$ est et la fonction $x \rightarrow -x^2$ est

Propriété

Soit I un intervalle réel. Soit f une fonction deux fois dérivable sur I et f' sa fonction dérivée.

- ▶ f est convexe sur I , si et seulement si, pour tout réel x de I , f' est croissante.
- ▶ f est concave sur I , si et seulement si, pour tout réel x de I , f' est décroissante.



2.2 Dérivée seconde

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I telle que sa dérivée f' soit elle aussi dérivable sur I .

On appelle *dérivée seconde* de f la dérivée de la dérivée de f , et on la note f'' .

Exemple

Soit $f(x) = x^3$. Alors,

Propriété

On dit que f est *concave* sur un intervalle I si et seulement si $f''(x) < 0$ sur I .

On dit que f est *convexe* sur un intervalle I si et seulement si $f''(x) > 0$ sur I .

Démonstration

.....
.....
.....

2.3 Point d'inflexion

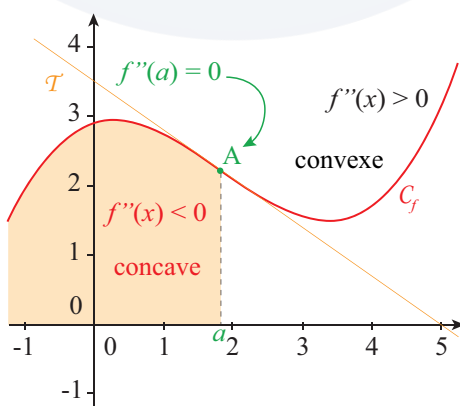
Définition

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I , et soit $a \in I$.

On dit que le point de coordonnées $(a ; f(a))$ est un *point d'inflexion* de la courbe représentative de f si $f''(x)$ s'annule en a en changeant de signe.



Graphiquement, cela se traduit par un changement de convexité en a .

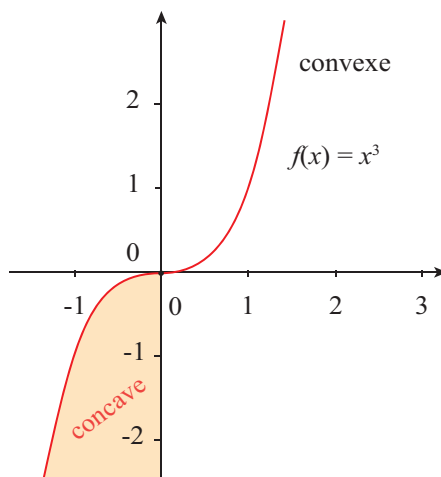




Exemple

Soit $f(x) = x^3$. Alors, $f''(x) = \dots\dots\dots$ et : $\dots\dots\dots$

Donc le point de coordonnées $(0 ; f(0))$, c'est-à-dire l'origine du repère, est un point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f .



2.4 Position relative de la tangente

Propriété

Soit f une fonction supposée deux fois dérivable sur I de dérivée seconde f'' .
Si f'' est positive sur I , alors la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes.

Démonstration

On considère la fonction ϕ la fonction définie sur I par la différence entre la fonction et sa tangente. Autrement dit, $\phi(x) = f(x) - (f(x_0)(x - x_0) + f'(x_0)(x - x_0)) = f(x) - f'(x_0)x + f'(x_0)x_0 + f(x_0)$. Cette fonction est dérivable car c'est la somme de fonctions dérivables, ainsi, $\phi'(x) = f'(x) - f'(x_0)$.

Or, f'' est positive donc f' est croissante. Donc,

si $x \geq x_0$ alors $f'(x) \geq f'(x_0)$ donc $\phi'(x) \geq 0$.

Et, si $x \leq x_0$ alors $f'(x) \leq f'(x_0)$ donc $\phi'(x) \leq 0$.

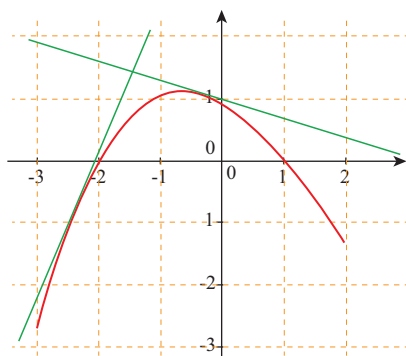
Par ailleurs, $\phi(x_0) = 0$. Le tableau de variations ci-dessous nous permet de déduire le résultat.

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$\phi(x)$	$-$	0	$+$
ϕ			

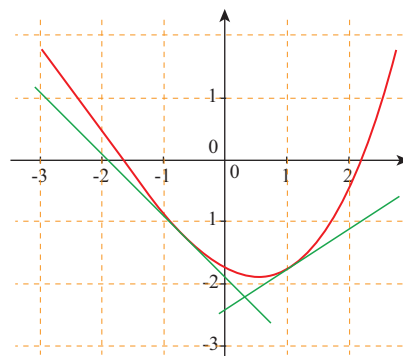
**Exemple**

Interprétation graphique :

- ▶ la courbe représentative d'une fonction *convexe* sur un intervalle I sera toujours *au-dessus* de ses tangentes ;
- ▶ la courbe représentative d'une fonction *concave* sur un intervalle I sera toujours *en dessous* de ses tangentes.



Fonction concave sur $[-3 ; 2]$



Fonction convexe sur $[-3 ; 2]$