

BACHOTAGE

Sujet Centres Étrangers 2026 - Jour 1



Σ Exercice 1.

La fédération internationale d'escrime établit des normes de fabrication pour les lames des armes des tireurs afin garantir au maximum leur sécurité. Pour tester la conformité de l'acier employé, la lame est pliée puis redressée toutes les secondes jusqu'à la rupture. La lame est conforme si la rupture intervient après plus de cinq heures de test.

Un équipementier d'escrime se fournit auprès de trois fabricants de lames :

- 60% des lames proviennent du fournisseur A;
- 12% du fournisseur B;
- le reste du fournisseur C.

Une étude de qualité a montré que :

- 90% des lames du fournisseur A étaient conformes;
- 95% des lames du fournisseur B étaient conformes;
- 85% des lames du fournisseur C étaient conformes;

On note T l'événement « la lame est conforme » et $\overline{T}$ son contraire.

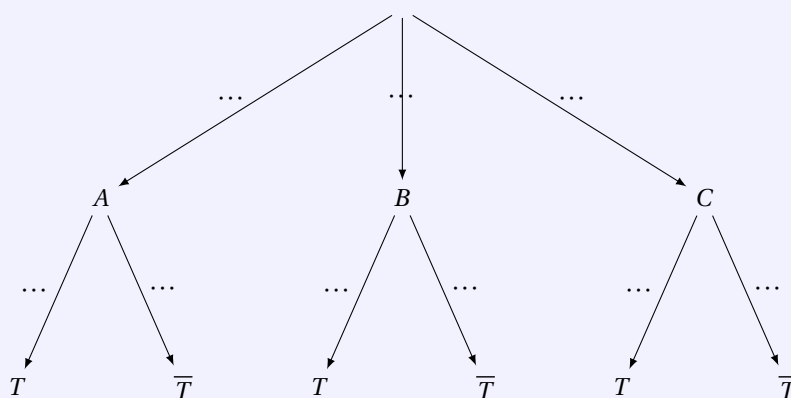
A : « la lame testée provient du fournisseur A »;

B : « la lame testée provient du fournisseur B »;

C : « la lame testée provient du fournisseur C »;

Partie A

1. Compléter l'arbre de probabilités associé à la situation.



2. Calculer $P(A \cap \overline{T})$ et interpréter.
3. Montrer que $P(T) = 0,892$.
4. Sachant que la lame n'est pas conforme, déterminer $P_{\overline{T}}(B)$ (arrondi au millième).

Partie B

On admet que $P(\overline{T}) = 0,108$.

Lors d'une compétition, un échantillon de 75 lames est prélevé aléatoirement. On note X le nombre de lames non conformes.

1. On admet que X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
2. Calculer $P(X = 6)$ (arrondi au millième).
3. L'équipementier affirme que $P(X > 8) < 0,5$. Vérifier cette affirmation.

Partie C

Pour n compétitions, on note $X_1, \dots, X_n$ les nombres de lames non conformes dans chaque échantillon, supposés indépendants, et :

$$M_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}.$$

1. Déterminer $E(M_n)$ et $V(M_n)$.
2. Justifier que :

$$P(|M_n - 8,1| \geq 2) \leq \frac{1,8063}{n}.$$

3. Trouver une valeur de n telle que :

$$P(|M_n - 8,1| < 2) \geq 0,95.$$

Interpréter.

Σ Exercice 2.

Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier.

1. **Affirmation 1 :** $f(x) = 4e^{-x} + \cos x + \sin x$ est solution de $y' + y = 2 \cos x$.
2. **Affirmation 2 :** Les courbes de $f(x) = 2x$ et $g(x) = \sin x$ ont un unique point d'intersection.
3. On considère la suite (v_n) définie par : $v_n = \frac{2n + \sin n}{n + 1}$.

Affirmation 3 : Cette suite est divergente.

4. On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 1 \end{cases}$.

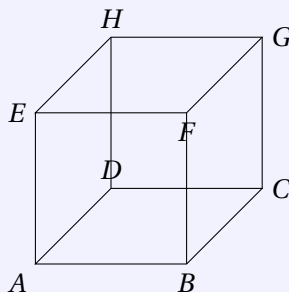
Affirmation 4 : Pour tout $n \geq 1$, $u_n = n^2$.

5. $S_n = \sum_{k=0}^n e^{-k}$.

Affirmation 5 : $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{e}{e-1}$

Σ Exercice 3.

On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous, muni du repère orthonormal $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



On note : - I le milieu du segment $[EF]$, - J le milieu du segment $[EH]$, - K le milieu du segment $[AE]$.

1. Déterminer les coordonnées des points I , J et K dans le repère donné.

2.
 - a. Calculer le produit scalaire $\vec{AI} \cdot \vec{AJ}$.
 - b. En déduire la mesure de l'angle $\widehat{IAJ}$, arrondie au dixième de degré.
3.
 - a. Montrer que le vecteur $\vec{KC}$ est un vecteur normal au plan (AIJ) .
 - b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (AIJ) est

$$x + y - \frac{1}{2}z = 0.$$

4. On note L le projeté orthogonal du point C sur le plan (AIJ) .
 - a. Déterminer les coordonnées du point L .
 - b. En déduire la distance du point C au plan (AIJ) .
5. Soit M un point de la droite (FG) , de coordonnées $(1; m; 1)$ avec $m \in \mathbb{R}$.
 - a. Montrer qu'une représentation paramétrique possible de la droite (IM) est :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2} \\ y = ms \\ z = \frac{1}{2}s + 1 \end{cases} \quad \text{avec } s \in \mathbb{R}.$$

- b. Peut-on affirmer que les droites (IM) et (KC) sont coplanaires pour toute valeur de m ? Justifier.

Σ Exercice 4.

On considère la fonction

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$$

définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

On admet que f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$, et on note f' et f'' ses dérivées première et seconde.

Partie A

1.
 - a. Déterminer les limites de $f(x)$ lorsque $x \rightarrow 0^+$ et lorsque $x \rightarrow +\infty$.
 - b. Interpréter graphiquement ces résultats (comportement de la courbe, asymptotes éventuelles).
2. Montrer que, pour tout réel $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3}.$$

3. En déduire le sens de variation de f sur $]0, +\infty[$ et dresser le tableau de variations complet de f , en précisant les limites et les valeurs exactes des éventuels extremums.
4. Déterminer l'équation réduite de la droite tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
5. Vérifier que, pour tout réel $x > 0$,

$$f''(x) = \frac{-5 + 6\ln(x)}{x^4}.$$

6.
 - a. Étudier la convexité de f sur $]0, +\infty[$ et déterminer les coordonnées des éventuels points d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.
 - b. En déduire que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $\left]0, e^{\frac{5}{6}}\right]$, on a

$$x - 1 \geq \frac{\ln(x)}{x^2}.$$

7. Justifier que, pour tout réel x appartenant à $\left[e^{\frac{5}{6}}, +\infty\right]$, on a également

$$x - 1 \geq \frac{\ln(x)}{x^2}.$$

Partie B

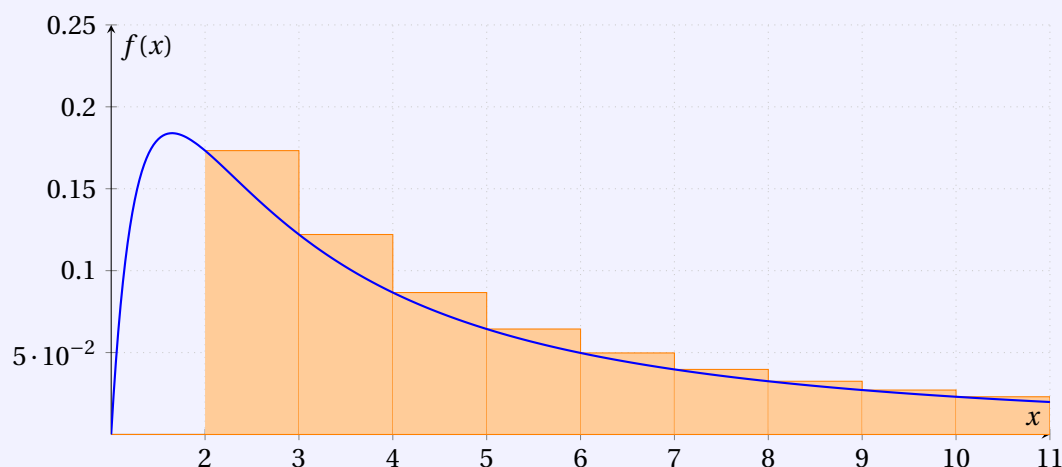
Pour tout entier naturel non nul n , on définit

$$I_n = \int_1^n \frac{\ln(x)}{x^2} dx.$$

1. Donner une interprétation graphique de I_n (en lien avec l'aire sous la courbe de f).
2. Montrer que la suite (I_n) est croissante.
3. On souhaite calculer une approximation de l'intégrale

$$\int_1^{10} f(x) dx$$

en utilisant la somme des aires de rectangles représentés sur un graphique ci-après



Pour cela, on utilise le script Python suivant :

```
from math import *
S = 1/(2*exp(1))
for i in range(2,10):
    S = ...
print(S)
```

Recopier et compléter ce script afin qu'il calcule la somme des aires des rectangles correspondant à l'approximation demandée.

4. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel non nul n ,

$$I_n = \frac{n-1-\ln(n)}{n}.$$

5. Calculer la limite de la suite (I_n) lorsque n tend vers $+\infty$.