

# BACHOTAGE

Corrigé -588 Sujet Asie 2026 - Jour 2



## Σ Exercice 1.

### Partie A

On considère la fonction  $f$  définie sur  $] -\infty, \frac{3}{2}[$  par :

$$f(x) = \frac{x-2}{2x-3}.$$

- Justifier tous les éléments du tableau de variation suivant :

|        |               |               |
|--------|---------------|---------------|
| $x$    | $-\infty$     | $\frac{3}{2}$ |
| $f(x)$ | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$     |

- En déduire que pour tout  $x \in [0, 1]$ , on a  $f(x) \in [0, 1]$ .

### Partie B

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :

$$u_0 = 0, \quad u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n - 2}{2u_n - 3}.$$

- Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1.$$

- En déduire que la suite  $(u_n)$  converge.
- On note  $\ell$  sa limite. En admettant que  $\ell$  vérifie  $f(\ell) = \ell$  sur  $[0, 1]$ , montrer que  $\ell = 1$ .
- On donne la fonction Python suivante :

```
def seuil(h):
    n = 0
    u = 0
    while u < 1 - h:
        n = n + 1
        u = (u - 2)/(2*u - 3)
    return n
```

Lappel `seuil(0.0001)` renvoie 5000. Interpréter ce résultat.

- Donner les quatre premiers termes de  $(u_n)$  sous forme de fractions irréductibles.
  - Conjecturer une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  puis la démontrer.

## Σ Exercice 2.

On pourra traiter indépendamment les deux parties de l'exercice. On arrondira, si nécessaire, les résultats à  $10^{-3}$  près. Dans cet exercice, on s'intéresse aux lancers-francs effectués par un joueur lors de compétitions de basketball. Pour modéliser la situation, on considère dans chaque partie du problème que les conditions dans lesquelles s'effectuent ces lancers sont identiques et que ces lancers sont indépendants deux à deux.

### Partie A

Les statistiques de réussite des lancers-francs d'un joueur sont de 49,2 % lors d'une saison. Dans cette partie, on assimilera cette fréquence à sa probabilité de réussite d'un lancer-franc. Au cours d'un match, ce joueur tente 16 lancers-francs. On désigne par  $X$  la variable aléatoire qui donne le nombre de lancers-francs réussis par ce joueur lors de ce match.

1. Justifier que la variable aléatoire  $X$  suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire  $X$  et l'interpréter dans le contexte de cet exercice.
3. Calculer  $P(X = 5)$ .
4. Calculer la probabilité que le joueur réussisse au moins six lancers-francs.

### Partie B

On note  $p$  la probabilité que le joueur réussisse un lancer-franc, où  $p$  est un réel tel que  $0 \leq p \leq 1$ .

On se place dans le cas où le joueur effectue 3 lancers-francs. On désigne par  $Y$  la variable aléatoire qui donne le nombre de lancers-francs réussis par ce joueur.

1. Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire  $Y$ .
2. Exprimer  $P(Y = 2)$  en fonction de  $p$ .
3. Donner la loi de probabilité de  $Y$ . Présenter la réponse sous forme de tableau.
4. Montrer que  $P(Y \geq 2) = -2p^3 + 3p^2$ .
5. On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0; 1]$  par

$$f(x) = -2x^3 + 3x^2.$$

- a. Étudier le sens de variation de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0; 1]$  et dresser son tableau de variation en y faisant figurer les valeurs aux bornes de l'intervalle  $[0; 1]$ .
- b. En déduire l'existence d'une unique valeur  $a$  dans l'intervalle  $[0; 1]$  telle que  $f(a) = 0,9$ .
- c. Donner un encadrement d'amplitude  $10^{-2}$  de cette valeur  $a$ .
- d. Interpréter la valeur de  $a$  dans le contexte de l'exercice.

## Σ Exercice 3.

Dans l'espace muni du repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère :

$$A(1, 2, 3), \quad B(-1, 3, 1), \quad C(2, 1, 6), \quad D(3, -2, -1).$$

1.
  - a. Montrer que  $A, B, C$  définissent un plan.
  - b. Montrer que  $\vec{n}(1, 4, 1)$  est un vecteur normal au plan  $(ABC)$ .
  - c. En déduire une équation cartésienne du plan  $(ABC)$ .
2.
  - a. Déterminer une équation paramétrique de la droite  $(d)$  perpendiculaire au plan  $(ABC)$  et passant par  $D$ .
  - b. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal  $H$  de  $D$  sur  $(ABC)$ .
  - c. En déduire que la distance de  $D$  au plan  $(ABC)$  vaut  $3\sqrt{2}$ .
3.
  - a. Montrer que :

$$\cos(\widehat{BAC}) = -\frac{3\sqrt{11}}{11}.$$

b. En déduire  $\sin(\widehat{BAC})$ .

c. Montrer que l'aire du triangle  $ABC$  vaut :

$$\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

4. Déterminer le volume du tétraèdre  $ABCD$  :

$$V = \frac{1}{3} \times B \times h.$$

#### Σ Exercice 4.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant votre choix. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte dans l'évaluation.

Les quatre questions sont indépendantes.

1. On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

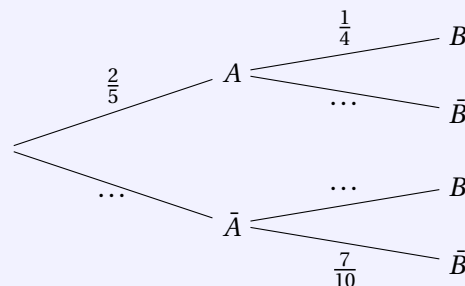
$$f(x) = \left(-\frac{1}{2}x + 2\right)^5.$$

**Affirmation 1 :** La fonction  $f$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ .

2. Une urne contient 32 jetons numérotés de 1 à 32 indiscernables au toucher. On tire simultanément 5 jetons de cette urne. On appelle *tirage* la liste non ordonnée des numéros des cinq jetons tirés.

**Affirmation 2 :** Le nombre de tirages possibles contenant au moins un multiple de 8 est égal à 103 096.

3. On considère l'arbre de probabilités ci-dessous.



**Affirmation 3 :**  $P_B(A) = \frac{9}{50}$ .

4. On considère l'équation différentielle

$$(E): y' + y = e^{-x} \cos(x),$$

où  $y$  est une fonction de la variable  $x$ , dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

**Affirmation 4 :** La fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$h(x) = e^{-x} \sin(x)$$

est solution de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Affirmation 5 :** Les solutions de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$  sont les fonctions  $k$  définies sur  $\mathbb{R}$  par

$$k(x) = C e^{-x} \sin(x), \quad C \in \mathbb{R}.$$