Suites numériques

Exercice 1 :

Soit la suite géométrique (u_n) telle que $u_2 = 1$ et la raison $q = \frac{1}{2}$.

1. Calculer u_0.
2. Déterminer u_n en fonction de n puis justifier que la suite (u_n) est convergente.
3. Calculer $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ en fonction de n.
4. Donner la valeur de S_6 sous la forme d'une fraction irréductible.
5. Quelle est la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$? Justifier.

Exercice 2 :

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2}{u_n + 4}$.

1. Calculer u_1 et u_2.

   Soit la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$.
2. Calculer v_0.
3. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{5}$.
4. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
5. Montrer que $u_n = \dfrac{1 + 2v_n}{1 - v_n}$ puis en déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 3 :

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{n}{2} + 1$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. On pose $v_n = u_n - n$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.
   (b) Déterminer v_n puis un en fonction de n.
   (c) Quelle sont les limites de la suite (v_n) et de la suite (u_n) ?

Exercice 4 :

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{-4}{4 + u_n}$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. On pose $v_n = \dfrac{1}{2 + u_n}$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison $r = \frac{1}{2}$.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n.
   (c) En déduire que $u_n = \dfrac{2}{n+1} - 2$.

(d) Que peut-on conjecturer pour la limite de (u_n) ?

Exercice 5 :

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 3} \end{cases}$

1. (a) Calculer u_1, u_2 et u_3.
   (b) La suite (u_n) est-elle arithmétique ?

2. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est positif et on pose $v_n = u_n^2$.
   (a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique et préciser sa raison et son premier terme.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n puis déduire u_n en fonction de n.
   (c) Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n > 50$.

Exercice 6 :

On s'intéresse à l'évolution d'une population de tigres dans une réserve en naturelle.
En 2019, il y avait 100 tigres. Une étude a montré que chaque année, 10% de la population de tigres meurt. En conséquence on introduit, chaque année, 5 nouveaux tigres à la réserve. On note u_n le nombre de tigres en 2019 + n.

1. Déterminer le nombre de tigres dans la réserve en 2020.

2. Donner la valeur de u_0 et justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,9u_n + 5$.

3. On pose $v_n = u_n - 50$.
   (a) Montrer que (v_n) est géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   (b) Déterminer l'expression de v_n puis de un en fonction de n.
   (c) En déduire la limite de la suite (u_n).
   (d) Interpréter dans le contexte les variations et la limites de la suite (u_n).

Exercice 7 :

Alain possède une piscine qui contient 50 m^3 d'eau. On rappelle que 1 m^3 = 1 000 ℓ.
Pour désinfecter l'eau, il doit ajouter du chlore. Le taux de chlore dans l'eau, exprimé en $mg.\ell^{-1}$, est défini comme la masse de chlore par unité de volume d'eau. Les piscinistes préconisent un taux de chlore compris entre 1 et 3$mg.\ell^{-1}$.
Sous l'action du milieu ambiant, notamment des ultraviolets, le chlore se décompose et disparaît peu à peu. Alain réalise certains jours, à heure fixe, des mesures avec un appareil qui permet une précision à 0,01 $mg.\ell^{-1}$. Le mercredi 19 juin, il mesure un taux de chlore de 0,70 $mg.\ell^{-1}$. Pour maintenir le taux de chlore dans sa piscine, Alain décide, à partir du jeudi 20 juin, d'ajouter chaque jour une quantité de 15 g de chlore. On admet que ce chlore se mélange uniformément dans l'eau de la piscine.

1. Justifier que cet ajout de chlore fait augmenter le taux de 0,3 $mg.\ell^{-1}$.

2. Pour tout entier naturel n, on note u_n le taux de chlore, en $mg.\ell^{-1}$, obtenu avec ce nouveau protocole n jours après le mercredi 19 juin. Ainsi $u_0 = 0,7$. On admet que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0,92u_n + 0,3$.
   (a) Calculer u_1 et u_2 avec la précision de l'appareil.
   On pose $v_n = u_n - 3,75$.
   (b) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.
   (c) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
   (d) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

3. À long terme, le taux de chlore sera-t-il conforme à la préconisation des piscinistes ? Justifier la réponse.

4. Reproduire et compléter l'algorithme ci-dessous écrit en langage Python pour que la fonction AlerteChlore renvoie, lorsqu'il existe, le plus petit entier n tel que $u_n > s$.

```
def AlerteChlore(s) :
    n=0
    u=0.7
    while . . . . . . . . :
        n = . . .
        u = . . .
    return n
```

$\boxed{5}$ Quelle valeur obtient-on en saisissant l'instruction AlerteChlore(3) ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 8 :

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 0,75u_n + 5 \end{cases}$

$\boxed{1}$ Calculer u_1, u_2.

$\boxed{2}$ On peut montrer que la forme explicite de u_n est : $u_n = -18 \times 0,75^n + 20$.

(a) Déterminer la monotonie de la suite (u_n).

(b) Montrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

$\boxed{3}$ Le programme suivant, en Python, doit renvoyer après son exécution la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $u_n \geqslant 19,5$.

```
def seuil(s) :
    n=0
    u= .....
    while u. . . . . . :
        u = . . .
        n = n+1
    return . . .
```

Compléter ce programme afin que le programme renvoie la valeur attendue.

$\boxed{4}$ En utilisant la calculatrice, donner la valeur retournée.

$\boxed{5}$ Dans quel intervalle se trouve les termes u_n à partir de cette valeur ?

Exercice 9 :

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 5u_n - 8n + 6$.

$\boxed{1}$ Calculer u_1 et u_2

$\boxed{2}$ (a) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 2n$.

(b) En déduire la limite de la suite (u_n).

$\boxed{3}$ Soit $p \in \mathbb{N}$.

(a) Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins entier naturel N tel que, pour tout entier naturel $n > N$, on a $u_n > 10^p$.

(b) Dans cette question $p = 6$. Écrire un algorithme permettant de calculer N puis donner la valeur affichée.

```
def . . . . . . :
    n=0
    u= .....
    while u. . . . . . :
        u = . . .
        n = n+1
    return . . .
```

Exercice 10 :

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n + \dfrac{1}{4}n + 1. \end{cases}$

1. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.

2. En déduire, en justifiant la réponse, la monotonie et la limite de (u_n).

3. Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = u_n - n$.
   (a) Montrer que (v_n) est géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   (b) Déterminer v_n puis u_n en fonction de n.
   (c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 11 :

Des biologistes étudient l'évolution d'une population d'insectes dans un jardin botanique. Au début de l'étude la population est de 100 000 insectes. Pour préserver l'équilibre du milieu naturelle nombre d'insectes ne doit pas dépasser 400 000. En tenant compte des contraintes du milieu naturel dans lequel évoluent les insectes, les biologistes modélisent le nombre d'insectes à l'aide de la suite (u_n), définie par : $u_0 = 0,1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = 1,6u_n - 1,6u_n^2$$

où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est le nombre d'insectes, exprimé en millions, au bout de n mois.

1. Déterminer le nombre d'insectes au bout d'un mois.

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$ par $f(x) = 1,6x - 1,6x^2$.
   (a) Résoudre l'équation $f(x) = x$.
   (b) Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$.

3. (a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.
   (b) Montrer que la suite (u_n) est convergente.
   (c) Déterminer la limite de (u_n).
   (d) On donne ci-dessous la fonction seuil, écrite en langage Python.

```python
def seuil(a) :
    u=0.1
    n=0
    while u<a :
        u=1.6*u-1.6*u**2
        n=n+1
    return n
```

   (e) Qu'observe-t-on si on saisit seuil(0.4) ?
   (f) Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de seuil(0.35). Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.