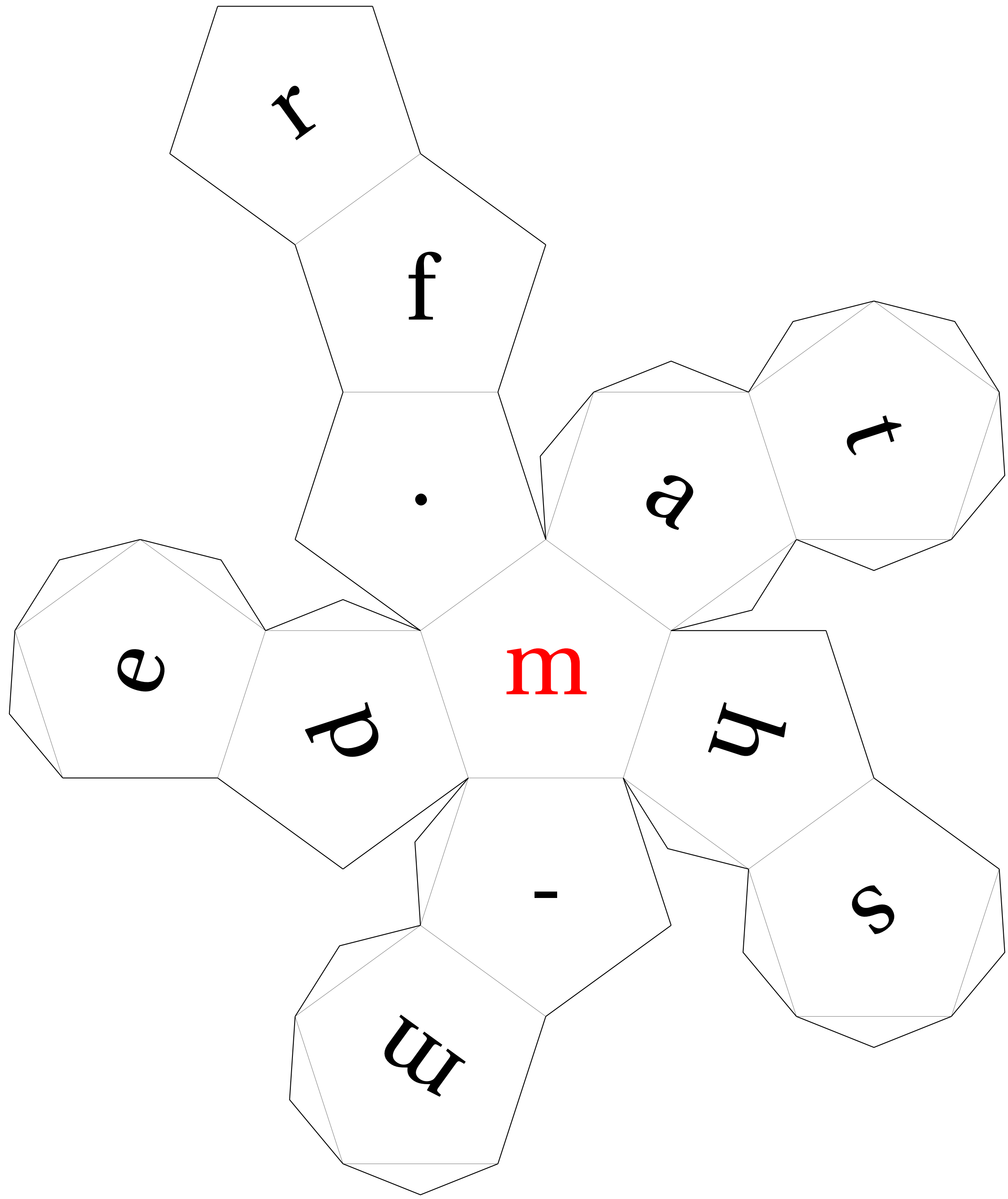
Sujets du Bac

MATHÉMATIQUES
Terminale Spé
2024-2025



Lycée Evariste Galois

Sujet : Amérique du Nord 21 mai 2025

EXERCICE 1 **6 points**

Pour accéder au réseau privé d'une entreprise depuis l'extérieur, les connexions des employés transitent aléatoirement via trois serveurs distants différents, notés A, B et C. Ces serveurs ont des caractéristiques techniques différentes et les connexions se répartissent de la manière suivante :

- 25 % des connexions transitent via le serveur A ;
- 15 % des connexions transitent via le serveur B ;
- le reste des connexions s'effectue via le serveur C.

Les connexions à distance sont parfois instables et, lors du fonctionnement normal des serveurs, les utilisateurs peuvent subir des déconnexions pour différentes raisons (saturation des serveurs, débit internet insuffisant, attaques malveillantes, mises à jour de logiciels, etc.).

On dira qu'une connexion est stable si l'utilisateur ne subit pas de déconnexion après son identification aux serveurs. L'équipe de maintenance informatique a observé statistiquement que, dans le cadre d'un fonctionnement habituel des serveurs :

- 90 % des connexions via le serveur A sont stables ;
- 80 % des connexions via le serveur B sont stables ;
- 85 % des connexions via le serveur C sont stables.

Les parties **A** et **B** sont indépendantes l'une de l'autre et peuvent être traitées séparément.

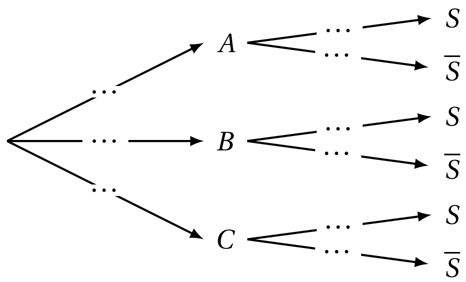
Partie A

On s'intéresse au hasard à l'état d'une connexion effectuée par un employé de l'entreprise. On considère les évènements suivants :

- A : « La connexion s'est effectuée via le serveur A » ;
- B : « La connexion s'est effectuée via le serveur B » ;
- C : « La connexion s'est effectuée via le serveur C » ;
- S : « La connexion est stable ».

On note $\overline{S}$ l'évènement contraire de l'évènement S.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous modélisant la situation de l'énoncé.



2. Démontrer que la probabilité que la connexion soit stable et passe par le serveur B est égale à 0, 12.

3. Calculer la probabilité $P\left(C \cap \overline{S}\right)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4. Démontrer que la probabilité de l'évènement S est $P(S) = 0,855$.

5. On suppose désormais que la connexion est stable.

Calculer la probabilité que la connexion ait eu lieu depuis le serveur B.

On donnera la valeur arrondie au millième.

Partie B

D'après la **partie A**, la probabilité qu'une connexion soit **instable** est égale à $0,145$.

1. Dans le but de détecter les dysfonctionnements de serveurs, on étudie un échantillon de 50 connexions au réseau, ces connexions étant choisies au hasard. On suppose que le nombre de connexions est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de connexions instables au réseau de l'entreprise, dans cet échantillon de 50 connexions.

a. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.

b. Donner la probabilité qu'au plus huit connexions soient instables. *On donnera la valeur arrondie au millième.*

2. Dans cette question, on constitue désormais un échantillon de n connexions, toujours dans les mêmes conditions, où n désigne un entier naturel strictement positif. On note X_n la variable aléatoire égale aux nombres de connexions instables et on admet que X_n suit une loi binomiale de paramètres n et 0,145.

a. Donner l'expression en fonction de n de la probabilité p_n qu'au moins une connexion de cet échantillon soit instable.

b. Déterminer, en justifiant, la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que la probabilité p_n est supérieure ou égale à 0,99.

3. On s'intéresse à la variable aléatoire F_n égale à la fréquence de connexions instables dans un échantillon de n connexions, où n désigne un entier naturel strictement positif.

On a donc $F_n = \dfrac{X_n}{n}$, où X_n est la variable aléatoire définie à la question **2.**

a. Calculer l'espérance $E(F_n)$.

On admet que $V(F_n) = \dfrac{0,123975}{n}$.

b. Vérifier que : $P(|F_n - 0,145| \geqslant 0,1) \leqslant \dfrac{12,5}{n}$

c. Un responsable de l'entreprise étudie un échantillon de 1 000 connexions et constate que pour cet échantillon $F_{1000} = 0,3$. Il soupçonne un dysfonctionnement des serveurs. A-t-il raison ?

EXERCICE 2 **5 points**

On considère la suite numérique (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}$$

On admet que la suite (u_n) est bien définie.

1. Calculer le terme u_1.

2. On définit la suite (a_n) pour tout entier naturel n, par :

$$a_n = \frac{u_n}{u_n - 1}$$

On admet que la suite (a_n) est bien définie.

a. Calculer a_0 et a_1.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 3a_n - 1$.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$$a_n \geqslant 3n - 1$$

d. En déduire la limite de la suite (a_n).

3. On souhaite étudier la limite de la suite (u_n).

a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{a_n}{a_n - 1}$.

b. En déduire la limite de la suite (u_n).

4. On admet que la suite (u_n) est décroissante.

On considère le programme suivant écrit en langage Python :

```
def algo(p):
  u=2
  n=0
  while u-1>p:
    u=(2*u+1)/(u+2)
    n=n+1
  return (n,u)
```

a. Interpréter les valeurs `n` et `u` renvoyées par l'appel de la fonction `algo(p)` dans le contexte de l'exercice.

b. Donner, sans justifier, la valeur de n pour $p = 0,001$.

EXERCICE 3 **4 points**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

On considère la droite (d) dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3-2t \\ y & = & -1 \\ z & = & 2-6t \end{array}\right. \text{, où } t \in \mathbb{R}$$

On considère également les points suivants :

- $\mathrm{A}(3\ ;\ -3\ ;\ -2)$
- $\mathrm{B}(5\ ;\ -4\ ;\ -1)$
- C le point de la droite (d) d'abscisse 2
- H le projeté orthogonal du point B sur le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x + 3z - 7 = 0$

Affirmation 1

La droite (d) et l'axe des ordonnées sont deux droites non coplanaires.

Affirmation 2

Le plan passant par A et orthogonal à la droite (d) a pour équation cartésienne :

$$x + 3z + 3 = 0$$

Affirmation 3

Une mesure, exprimée en radian, de l'angle géométrique $\widehat{\mathrm{BAC}}$ est $\dfrac{\pi}{6}$.

Affirmation 4

La distance BH est égale à $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

EXERCICE 4 **5 points**

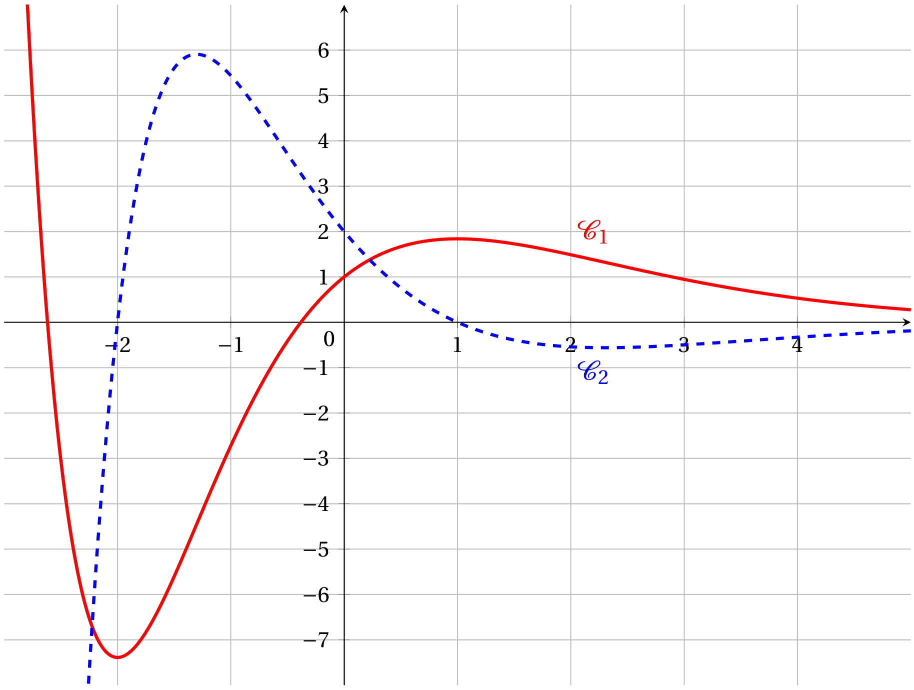
La **partie C** est indépendante des parties **A** et **B**.

Partie A

On donne ci-dessous, dans un repère orthogonal, les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, représentations graphiques de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. L'une des deux fonctions représentées est la fonction dérivée de l'autre. On les notera g et g.

On précise également que :

- La courbe $\mathscr{C}_1$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\ ;\ 1)$.
- La courbe $\mathscr{C}_2$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\ ;\ 2)$ et l'axe des abscisses aux points de coordonnées $(-2\ ;\ 0)$ et $(1\ ;\ 0)$.



1. En justifiant, associer à chacune des fonctions g et g' sa représentation graphique.
2. Justifier que l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse 0 est $y = 2x + 1$.

Partie B

On considère (E) l'équation différentielle

$$y + y = (2x+3)\mathrm{e}^{-x},$$

où y est une fonction de la variable réelle x.

1. Montrer que la fonction f_0 définie pour tout nombre réel x par $f_0(x) = \left(x^2 + 3x\right)\mathrm{e}^{-x}$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
2. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y + y' = 0$.
3. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E).
4. On admet que la fonction g décrite dans la **partie A** est une solution de l'équation différentielle (E).

   Déterminer alors l'expression de la fonction g.
5. Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) dont la courbe admet exactement deux points d'inflexion.

Partie C

On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x par :

$$f(x) = \left(x^2 + 3x + 2\right) e^{-x}$$

1. Démontrer que la limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à 0.

On admet par ailleurs que la limite de la fonction f en $-\infty$ est égale à $+\infty$.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

   a. Vérifier que, pour tout nombre réel x, $f(x) = \left(-x^2 - x + 1\right) e^{-x}$.

   b. Déterminer le signe de la fonction dérivée f sur $\mathbb{R}$ puis en déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3. Expliquer pourquoi la fonction f est positive sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

4. On notera $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. On admet que la fonction F définie pour tout nombre réel x par $F(x) = \left(-x^2 - 5x - 7\right) e^{-x}$ est une primitive de la fonction f.

Soit α un nombre réel positif.

Déterminer l'aire $\mathscr{A}(\alpha)$, exprimée en unité d'aire, du domaine du plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \alpha$.

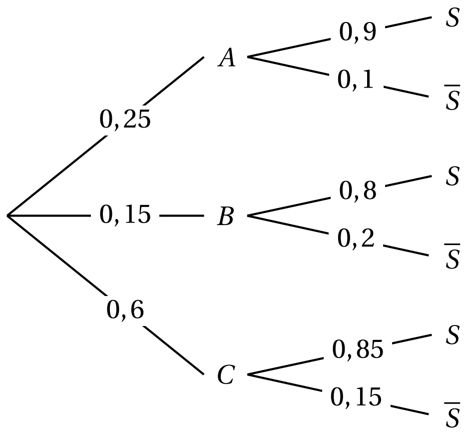
Corrigés : Amérique du Nord 21 mai 2025

EXERCICE 1 **6 points**

Partie A

1. Puisqu'on s'intéresse à une connexion au hasard, on est en situation d'équiprobabilité, et les proportions annoncées dans l'énoncé sont assimilables à des probabilités.

   Cela donne l'arbre pondéré ci-dessous :



2. La probabilité que la connexion soit stable et passe par le serveur B est $P(S\cap B)$.

   $P(S\cap B) = P(B)\times P_B(S) = 0,15\times 0,8 = 0,12$.

3. De même :

   $P\left(C\cap\overline{S}\right) = P(C)\times P_C\left(\overline{S}\right) = 0,6\times 0,15 = 0,09$.

   Cela signifie que 9 % des connexions à distance de l'entreprise sont des connexions transitant via le serveur C et qui sont instables.

4. Les évènements A, B et C forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} P(S) &= P(A)\times P_A(S) + P(B)\times P_B(S) + P(C)\times P_C(S)\\ &= 0,25\times 0,9 + 0,15\times 0,8 + 0,6\times 0,85\\ &= 0,225 + 0,12 + 0,51\\ &= 0,855 \end{aligned}$$

   La probabilité de l'évènement S est donc bien $P(S) = 0,855$.

5. La probabilité demandée est $P_S(B)$. Par définition, on a :

$$P_S(B) = \frac{P(S\cap B)}{P(S)} = \frac{0,12}{0,855} = \frac{8}{57} \approx 0,1403.$$

   La probabilité que la connexion ait transité par le serveur B, sachant qu'elle est stable est d'environ 0,140, au millième près.

Partie B

1. **a.** Les éléments suivants ne sont pas nécessaires, puisqu'on admet que X suit une loi binomiale :

   - Chaque connexion est vue comme une expérience aléatoire à deux issues : le succès « la connexion est instable », de probabilité p

     $p = P\left(\overline{S}\right) = 1 - 0,855 = 0,145$;

- cette épreuve est répétée $n = 50$ fois, de façon supposée identique et indépendante, puisque la constitution de l'échantillon est réputée assimilable à un tirage avec remise ;
- X est la variable aléatoire qui compte le nombre de succès, c'est-à-dire le nombre de connexions instables, sur ces 50 répétitions.

Donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,145$.

b. La probabilité qu'au plus huit connexions soient instables est $P(X \leqslant 8)$.

Avec la calculatrice, on a : $P(X \leqslant 8) \approx 0,7044$,

Donc la probabilité qu'au plus huit connexions soient instables est $0,704$ arrondi au millième.

2. **a.** Puisque X_n suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,145$, pour tout entier naturel k inférieur ou égal à n, on aura :

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k} \times 0,145^k \times 0,855^{n-k}.$$

L'évènement « au moins une connexion de cet échantillon est instable » est l'évènement contraire de « aucune connexion de cet échantillon n'est instable », autrement dit $\{X = 0\}$.

Ainsi : $p_n = 1 - P(X_n = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times 0,145^0 \times 0,855^{n-0} = 1 - 0,855^n$.

b. Résolvons, pour n entier naturel :

$$\begin{aligned}
p_n \geqslant 0,99 &\iff 1 - 0,855^n \geqslant 0,99 \\
&\iff -0,855^n \geqslant -0,01 \\
&\iff 0,855^n \leqslant 0,01 \quad \text{car } -1 < 0 \\
&\iff \ln\left(0,855^n\right) \leqslant \ln(0,01) \quad \text{car ln est croissante sur } \mathbb{R}^{*+} \\
&\iff n \ln(0,855) \leqslant \ln(0,01) \\
&\iff n \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,855)} \quad \text{car } 0,855 < 1 \text{ donc } \ln(0,855) < 0
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,855)} \approx 29,4$, donc c'est à partir de $n = 30$ que l'on a une probabilité p_n supérieure ou égale à 0,99.

3. **a.** Puisque X_n suit la loi binomiale de paramètres n et $0,145$, alors l'espérance de X_n est, par propriété : $E(X_n) = np = 0,145n$.

On a ensuite $F_n = \dfrac{1}{n} \times X_n$,

donc, par linéarité de l'espérance : $E(F_n) = \dfrac{1}{n} E(X_n) = \dfrac{1}{n} \times 0,145n = 0,145$.

On admet que $V(F_n) = \dfrac{0,123975}{n}$.

b. Écrivons l'inégalité de concentration de Bienaymé-Tchebychev pour la moyenne empirique F_n, avec une précision $t = 0,1$:

$$\begin{aligned}
P(|F_n - E(F_n)| \geqslant t) \leqslant \frac{V(F_n)}{t^2} &\implies P(|F_n - 0,145| \geqslant 0,1) \leqslant \frac{\frac{0,123975}{n}}{0,1^2} \\
&\implies P(|F_n - 0,145| \geqslant 0,1) \leqslant \frac{0,123975}{n} \times \frac{1}{0,01} \\
&\implies P(|F_n - 0,145| \geqslant 0,1) \leqslant \frac{12,3975}{n} \\
&\implies P(|F_n - 0,145| \geqslant 0,1) \leqslant \frac{12,5}{n} \\
&\quad \text{car } 12,3975 < 12,5
\end{aligned}$$

On a donc bien l'inégalité annoncée.

c. Si on étudie un échantillon de 1 000 connexions et que l'on constate que pour cet échantillon $F_{1000} = 0,3$, alors on a $0,3 - 0,145 = 0,155$: cette conduite de l'expérience réalise l'évènement $\left\{\left|F_{1000} - 0,145\right| \geqslant 0,1\right\}$.

D'après la question précédente, la probabilité de cet évènement est inférieure ou égale à $\dfrac{12,5}{1000} = 0,0125$, il est donc hautement probable que les serveurs dysfonctionnent, car si la modélisation (basée sur un fonctionnement normal des serveurs) est fiable, une telle fréquence est très peu probable.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour cet exercice, on admet que les deux suites (a_n) et (u_n) sont bien définies, ce qui équivaut à admettre que les termes de la suite (u_n) sont tous différents de -2 (pour que la suite (u_n) soit bien définie) et de 1 (pour que (a_n) soit bien définie).

1. On a : $u_1 = \dfrac{2u_0+1}{u_0+2} = \dfrac{2\times 2+1}{2+2} = \dfrac{5}{4} = 1,25$.

2. **a.** On a : $a_0 = \dfrac{u_0}{u_0-1} = \dfrac{2}{2-1} = 2$

et $a_1 = \dfrac{u_1}{u_1-1} = \dfrac{1,25}{1,25-1} = \dfrac{1,25}{0,25} = 5$.

b. Soit n un entier naturel.

On a, d'une part : $$a_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{u_{n+1}-1} = \dfrac{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}}{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}-1} = \dfrac{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}}{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}-\dfrac{u_n+2}{u_n+2}}$$
$$= \dfrac{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}}{\dfrac{2u_n+1-u_n-2}{u_n+2}} = \dfrac{2u_n+1}{u_n+2}\times\dfrac{u_n+2}{u_n-1}$$
$$= \dfrac{2u_n+1}{u_n-1}$$

et, d'autre part : $$3a_n - 1 = 3\times\dfrac{u_n}{u_n-1} - 1 = \dfrac{3u_n}{u_n-1} - \dfrac{u_n-1}{u_n-1} = \dfrac{3u_n-(u_n-1)}{u_n-1}$$
$$= \dfrac{2u_n+1}{u_n-1}$$

On constate donc bien que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 3a_n - 1$.

Autre méthode :

Soit n un entier naturel.

$$a_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{u_{n+1}-1} = \dfrac{u_{n+1}-1+1}{u_{n+1}-1} = 1 + \dfrac{1}{u_{n+1}-1}$$
$$= 1 + \dfrac{1}{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}-1} = 1 + \dfrac{1}{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}-\dfrac{u_n+2}{u_n+2}}$$
$$= 1 + \dfrac{1}{\dfrac{u_n-1}{u_n+2}} = 1 + \dfrac{u_n+2}{u_n-1}$$
$$= 2 + \dfrac{u_n+2}{u_n-1} - 1 = \dfrac{2(u_n-1)+u_n+2}{u_n-1} - 1$$
$$= \dfrac{2u_n-2+u_n+2}{u_n-1} - 1$$
$$= \dfrac{3u_n}{u_n-1} - 1 = 3\dfrac{u_n}{u_n-1} - 1$$
$$= 3a_n - 1$$

c. Posons, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, l'affirmation P_n :

« $a_n \geqslant 3n - 1$ ».

Initialisation : On a calculé $a_1 = 5$ et donc on a bien $5 \geqslant 3 \times 1 - 1 = 2$.

L'affirmation P_1 est donc vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel non nul. On suppose que l'affirmation P_n est vraie, c'est-à-dire que $a_n \geqslant 3n - 1$.

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned}
a_n \geqslant 3n-1 &\implies 3a_n \geqslant 3(3n-1) \quad \text{car } 3>0\\
&\implies 3a_n - 1 \geqslant 9n - 3 - 1\\
&\implies a_{n+1} \geqslant 9n - 4 \quad \text{d'après la question } \textbf{2. b.}\ 3a_n - 1 = a_{n+1}\\
&\implies a_{n+1} \geqslant 3n + 6n + 3 - 7\\
&\implies a_{n+1} \geqslant 3(n+1) + 6n - 7\\
&\implies a_{n+1} \geqslant 3(n+1) - 1 + 6n - 6\\
&\implies a_{n+1} \geqslant 3(n+1) - 1 + 6(n-1)\\
&\implies a_{n+1} \geqslant 3(n+1) - 1 \quad \text{car } 6(n-1) \geqslant 0
\end{aligned}$$

Si, pour un entier n naturel non nul (ce qui garantit $(n-1) \geqslant 0$), P_n est vraie, alors P_{n+1} est vraie également.

Conclusion : L'affirmation P_1 est vraie, et, pour tout entier naturel non nul n, la véracité de l'affirmation est héréditaire : d'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout entier naturel non nul n, on a : $a_n \geqslant 3n - 1$.

d. Comme $3 > 0$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n - 1 = +\infty$.

Par comparaison, puisque pour tout n non nul, on a $a_n \geqslant 3n - 1$, on en déduit que la suite (a_n) diverge vers $+\infty$.

3. **a.** Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned}
a_n = \frac{u_n}{u_n - 1} &\iff a_n \times (u_n - 1) = u_n \quad \text{car } u_n - 1 \neq 0\\
&\iff a_n \times u_n - a_n - u_n = 0\\
&\iff (a_n - 1) \times u_n - a_n = 0\\
&\iff (a_n - 1) \times u_n = a_n\\
&\iff u_n = \frac{a_n}{a_n - 1}
\end{aligned}$$

Pour la dernière étape, la division par $a_n - 1$ est légitime, puisque a_n est un quotient de deux nombres différents, car le dénominateur est égal au numérateur moins 1, donc a_n ne peut pas être égal à 1, donc $a_n - 1$ est non nul.

Ainsi, on a bien exprimé u_n en fonction de a_n avec la relation annoncée dans le question.

b. Avec les questions **2. a.** on a $a_0 = 2$ et avec **2. c.**, pour n naturel non nul, on a $a_n \geqslant 3n - 1 > 0$.

Ainsi, pour tout entier naturel n, a_n est non nul.

On déduit donc de la question précédente que, pour tout n naturel, on a : $u_n = \dfrac{a_n}{a_n - 1} = \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{a_n}}$.

Enfin, puisque (a_n) diverge vers $+\infty$, par limite du quotient, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$,

puis, par limite de la somme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{a_n} = 1$,

enfin, par limite du quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{a_n}} = 1$.

La suite (u_n) converge donc vers 1.

4. Puisqu'on admet que la suite (u_n) est décroissante, cela signifie que la suite est minorée par sa limite et donc que pour tout entier naturel n, on a $u_n \geqslant 1$ donc $u_n - 1 \geqslant 0$.

a. Cette fonction python initialise la variable `u` à 2, ce qui est la valeur de u_0 et la variable `n` à 0, ce qui est l'indice correspondant.

Puis, à chaque exécution de la boucle `while`, `u` se voit affecter le terme suivant dans la suite (u_n) et `n` se voit affecter l'entier suivant, donc l'indice correspondant au terme dont la valeur est stockée dans la variable `u`.

Cette boucle `while` tourne tant que l'écart entre le terme stocké dans la variable `u` et la limite 1 est strictement supérieur à la valeur `p`, qui est l'argument choisi pour invoquer la fonction.

Les valeurs `n` et `u` renvoyées par l'appel de la fonction `algo(p)` correspondent donc respectivement à l'indice et à la valeur du premier terme de la suite pour lequel l'écart entre le terme et la limite de la suite est inférieur ou égal à la valeur `p` choisie.

b. On parcourt la suite à la calculatrice, et on constate que $u_5 \approx 1{,}0027$, donc $u_5 - 1 > 0{,}001$ et $u_6 \approx 1{,}0009$, donc $u_6 - 1 \leqslant 0{,}001$.

La valeur de n pour $p = 0{,}001$ est donc 6 (et la valeur renvoyée pour `u` est donc une valeur approchée de u_6).

On peut aussi programmer la fonction python sur la calculatrice et faire l'appel `algo(0.001)`, qui renvoie `(6, 1,000 914 913 083 257)`

EXERCICE 3 **4 points**

Affirmation 1 : Vraie

(d) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\0\\-6\end{pmatrix}$ et l'axe des ordonnées par $\overrightarrow{j}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

Les deux droites ont des vecteurs directeurs non colinéaires (ils sont même orthogonaux) donc les droites ne sont ni parallèles, ni confondues.

L'axe des ordonnées passe par l'origine du repère, de coordonnées $(0\,;\,0\,;\,0)$ et est dirigé par $\overrightarrow{j}$ donc une représentation paramétrique de l'axe des ordonnées est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0\\ y &=& 0+s\\ z &=& 0\end{array}\right., \text{ où } s \in \mathbb{R}$$

(d) et l'axe des ordonnées seront donc coplanaires si et seulement si ces deux droites sont sécantes, c'est-à-dire si et seulement si le système suivant a une solution :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3-2t &=& 0\\ -1 &=& s\\ 2-6t &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2t &=& 3\\ 6t &=& 2\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} t &=& 1{,}5\\ s &=& -1\\ t &=& \dfrac{1}{3}\end{array}\right.$$

Le système n'admet pas de solution, donc les droites n'ont pas de point commun.

Les droites ne sont ni parallèles, ni confondues, ni sécantes, par élimination, elles sont donc non coplanaires.

Affirmation 2 : Vraie

Soit $\mathcal{Q}$ plan passant par A et orthogonal à la droite (d).

(d) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\0\\-6\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\0\\-6\end{pmatrix}$ est donc un vecteur normal au plan $\mathcal{Q}$ et donc aussi $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ car $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ sont colinéaires et non nuls.

Le plan $\mathcal{Q}$ admet donc une équation de la forme $x + 0y + 3z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.

De plus, le point A appartient au plan $\mathcal{Q}$ donc $x_A + 3z_A + d = 0$ soit $3 + 3 \times (-2) + d = 0$.

On a donc $d = -3 + 6 = 3$.

Une équation cartésienne du plan passant par A et orthogonal à la droite (d) est donc : $x + 3z + 3 = 0$.

Affirmation 3 : Fausse

Afin de déterminer l'angle $\widehat{\text{BAC}}$ nous allons déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{AC}}$

Déterminons tout d'abord les coordonnées du point C :

C est un point de (d), il existe donc un réel t tel que : $\begin{cases} x_\text{C} = 3 - 2t \\ y_\text{C} = -1 \\ z_\text{C} = 2 - 6t \end{cases}$

Or C est le point d'abscisse 2, on a donc $x_\text{C} = 2$ d'où $3 - 2t = 2 \iff 1 = 2t$.

$$\iff t = \frac{1}{2}$$

On a donc $z_\text{C} = 2 - 6 \times \dfrac{1}{2} = 2 - 3 = -1$

Les coordonnées du point C sont donc $(2\ ;\ -1\ ;\ -1)$.

On peut donc calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$:

$\overrightarrow{\text{AB}} \begin{pmatrix} x_\text{B} - x_\text{A} \\ y_\text{B} - y_\text{A} \\ z_\text{B} - z_\text{A} \end{pmatrix}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{\text{AB}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ de même : $\overrightarrow{\text{AC}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Nous sommes dans un repère orthonormé, nous avons donc :

$\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{AC}} = 2 \times (-1) + (-1) \times 2 + 1 \times 1 = -3$

Calculons les normes des vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$:

$\left\| \overrightarrow{\text{AB}} \right\|^2 = 2^2 + (-1)^2 + 1^2 = 6$, donc, comme une norme est positive $\left\| \overrightarrow{\text{AB}} \right\| = \sqrt{6}$.

$\left\| \overrightarrow{\text{AC}} \right\|^2 = (-1)^2 + 2^2 + 1^2 = 6$, donc, de même : $\left\| \overrightarrow{\text{AC}} \right\| = \sqrt{6}$.

Or $\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{AC}} = \text{AB} \times \text{AC} \times \cos\left(\widehat{\text{BAC}}\right)$

on en déduit donc que : $-1 = \sqrt{6} \times \sqrt{6} \times \cos\left(\widehat{\text{BAC}}\right)$,

soit $\cos\left(\widehat{\text{BAC}}\right) = \dfrac{-3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = -\dfrac{3}{6} = -\dfrac{1}{2}$

et donc une mesure, exprimée en radian, de l'angle géométrique $\widehat{\text{BAC}}$ est $\dfrac{2\pi}{3}$.

Affirmation 4 : Vraie

Déterminons les coordonnées du point H.

H est le projeté orthogonal du point B sur la plan $\mathscr{P}$, c'est donc l'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite Δ orthogonal au plan $\mathscr{P}$ passant par le point B.

Le vecteur $\overrightarrow{u'} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$, c'est donc un vecteur directeur de la droite Δ.

De plus le point $\text{B}(5\ ;\ -4\ ;\ -1)$ appartient à la droite Δ, une représentation paramétrique de la droite Δ est donc :

$$\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -4 + 0t \\ z = -1 + 3t \end{cases}, \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

L'intersection entre la droite Δ et le plan $\mathscr{P}$ donne l'équation en la variable t :

$$\begin{aligned}(5+t)+3(-1+3t)-7=0 &\iff 5+t-3+9t-7=0\\ &\iff 10t=5\\ &\iff t=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Le point H d'intersection entre la droite Δ et $\mathscr{P}$ est le point de paramètre $t=\dfrac{1}{2}$ dans la représentation paramétrique de la droite Δ.

Il a comme coordonnées : $\mathrm{H}\left(5+\dfrac{1}{2}\ ;\ -4\ ;\ -1+3\times\dfrac{1}{2}\right)$ soit $\mathrm{H}\left(\dfrac{11}{2}\ ;\ -4\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$.

On a donc : $\overrightarrow{\mathrm{BH}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$

d'où : $\left\|\overrightarrow{\mathrm{BH}}\right\|^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+0^2+\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}+\dfrac{9}{4}=\dfrac{10}{4}$, donc $\left\|\overrightarrow{\mathrm{BH}}\right\|=\sqrt{\dfrac{10}{4}}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

La distance BH est égale à $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

EXERCICE 4 **5 points**

Partie A

1. La fonction dont la courbe représentative est la courbe $\mathscr{C}_1$ est décroissante sur $]-\infty\ ;\ -2]$ et sur $[1\ ;\ +\infty[$, et croissante sur $[-2\ ;\ 1]$.

   La fonction dont la courbe représentative est la courbe $\mathscr{C}_2$ est négative sur

   $]-\infty\ ;\ -2]$ et sur $[1\ ;\ +\infty[$, et positive sur $[-2\ ;\ 1]$.

   Les variations d'une fonction étant déterminées par le signe de sa dérivée, on peut en déduire que la courbe $\mathscr{C}_1$ est la courbe représentative de la fonction g et la courbe $\mathscr{C}_2$ est la courbe représentative de la fonction g'.

2. L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse 0 est : $y=g'(0)(x-0)+g(0)=g'(0)x+g(0)$.

   La courbe $\mathscr{C}_1$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\ ;\ 1)$ donc $g(0)=1$.

   La courbe $\mathscr{C}_2$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\ ;\ 2)$ donc $g'(0)=2$.

   L'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse 0 est donc $y=2x+1$.

Partie B

1. f_0 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

   Pour tout réel x :
   $$\begin{aligned}f_0'(x)&=(2x+3)\times\mathrm{e}^{-x}+\left(x^2+3x\right)\times\left(-\mathrm{e}^{-x}\right).\\&=\left(2x+3-x^2-3x\right)\mathrm{e}^{-x}\\&=\left(-x^2-x+3\right)\mathrm{e}^{-x}\end{aligned}$$

   Pour tout réel x on a donc :
   $$\begin{aligned}f_0(x)+f_0'(x)&=\left(x^2+3x\right)\mathrm{e}^{-x}+\left(-x^2-x+3\right)\mathrm{e}^{-x}\\&=\left(x^2+3x-x^2-x+3\right)\mathrm{e}^{-x}\\&=(2x+3)\,\mathrm{e}^{-x}\end{aligned}$$

   La fonction f_0 est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

2. $(E_0) : y+y=0 \iff y'=-y$

   Les solutions sont donc les fonctions de la forme $x\longmapsto C\mathrm{e}^{-x}$, $C\in R$

3. (E) est une équation différentielle de la forme $y'=ay+f$, avec f_0 une solution particulière, les solutions sont donc les fonctions : $x\longmapsto C\mathrm{e}^{-x}+f_0(x)$ avec $C\in\mathbb{R}$. (c'est à dire les fonctions $x\longmapsto\left(x^2+3x+C\right)\mathrm{e}^{-x}$ avec $C\in\mathbb{R}$.)

4. La fonction g décrite dans la **partie A** est une solution de l'équation différentielle (E), il existe donc un réel C tel que pour tout réel x, $g(x) = \left(x^2+3x+C\right)\mathrm{e}^{-x}$.

Or $g(0) = 1$ donc $1 = (0+0+C)\mathrm{e}^0 = C$

L'expression de la fonction g est donc : $g(x) = \left(x^2+3x+1\right)\mathrm{e}^{-x}$.

5. La courbe admet exactement deux points d'inflexion si et seulement si la dérivée seconde de la fonction s'annule exactement deux fois en changeant de signe.

Soit f une solution de l'équation différentielle (E).

Il existe un réel C tel que pour tout réel x, $f(x) = \left(x^2+3x+C\right)\mathrm{e}^{-x}$.

Déterminons la dérivée f' et la dérivée seconde f'' de f.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x+3)\times\mathrm{e}^{-x} + \left(x^2+3x+C\right)\times\left(-\mathrm{e}^{-x}\right) \\ &= \left(2x+3-x^2-3x-C\right)\mathrm{e}^{-x} \\ &= \left(-x^2-x+3-C\right)\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}.$$

et

$$\begin{aligned} f''(x) &= (-2x-1)\times\mathrm{e}^{-x} + \left(-x^2-x+3-C\right)\times\left(-\mathrm{e}^{-x}\right) \\ &= \left(-2x-1+x^2+x-3+C\right)\mathrm{e}^{-x} \\ &= \left(x^2-x-4+C\right)\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}.$$

Une fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc $f''(x)$ est du signe de $x^2-x-4-C$.

Un polynôme du second degré s'annule deux fois en changeant de signe si et seulement si son discriminant est strictement positif.

Calculons le discriminant :

$\Delta = (-1)^2 - 4\times1\times(-4+C) = 1+16-4C = 17-4C$

La courbe admettra donc exactement deux points d'inflexion si $17-4C > 0$ c'est à dire $C < \dfrac{17}{4}$.

Les solutions de l'équation différentielle (E) dont la courbe admet exactement deux points d'inflexion sont donc les fonctions de la forme :

$$x \longmapsto \left(x^2+3x+C\right)\mathrm{e}^{-x} \text{ avec } C < \frac{17}{4}.$$

Partie C

1. $f(x) = \left(x^2+3x+2\right)\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x} + 3\dfrac{x}{\mathrm{e}^x} + \dfrac{2}{\mathrm{e}^x}$

lim $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ donc, par inverse, lim $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} = 0$

Par croissances comparées : pour tout entier n non nul, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{\mathrm{e}^x} = 0$

Donc par produit et par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x} + 3\dfrac{x}{\mathrm{e}^x} + \dfrac{2}{\mathrm{e}^x} = 0$

2. a. Pour tout nombre réel x, $f'(x) = (2x+3)\,\mathrm{e}^{-x} + \left(x^2+3x+2\right)\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)$.

$$\begin{aligned} &= \left(2x+3-x^2-3x-2\right)\mathrm{e}^{-x} \\ &= \left(-x^2-x+1\right)\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

b. Une fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc $f'(x)$ est du signe du polynôme du second degré $-x^2-x-1$.

$\Delta = (-1)^2 - 4\times(-1)\times1 = 1+4 = 5 > 0$

Le polynôme admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{-2} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{-2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Le coefficient dominant est négatif on en déduit donc :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$f(x_1)$	$\nearrow$	$f(x_2)$	$\searrow$	0

La fonction f est décroissante sur $\left]-\infty\,;\,\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right[$ et sur $\left]\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\,;\,+\infty\right[$.

Elle est croissante sur $\left]\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\,;\,\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right[$.

3. Une fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc $f(x)$ est du signe du polynôme du second degré x^2+3x+2.

Pour tout réel x : $x^2+3x+2=(x+2)(x+1)$

Les racines sont donc -2 et -1.

De plus le coefficient dominant est positif donc x^2+3x+2 est positif, entre autre, sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ et donc sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

La fonction f est donc positive sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

4. La fonction f est positive sur l'intervalle $[0;+\infty[$ donc sur $[0\,;\,\alpha]$ donc l'aire $\mathscr{A}(\alpha)$, exprimée en unité d'aire, du domaine du plan délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équation $x=0$ et $x=\alpha$ est égale à $\displaystyle\int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{dx}$.

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\alpha) &= \int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{dx} = \left[\mathrm{F(x)}\right]_0^{\alpha} = \mathrm{F}(\alpha)-\mathrm{F}(0)\\ &= \left(-\alpha^2-5\alpha-7\right)\mathrm{e}^{-\alpha}+7\end{aligned}$$

L'aire cherchée est égale à $\left(-\alpha^2-5\alpha-7\right)\mathrm{e}^{-\alpha}+7$ unités d'aire.

Sujet : Asie 11 juin 2025

Exercice 1 5 points

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

On considère :

- α un réel quelconque ;
- les points A(1 ; 1 ; 0), B(2 ; 1 ; 0) et C(α ; 3 ; α) ;
- (d) la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = \quad 2t \\ z = \quad -t \end{array}\right. , \quad t \in \mathbb{R}$$

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse, puis justifier la réponse donnée. Une réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

Affirmation 1 : Pour toutes les valeurs de α, les points A, B et C définissent un plan et un vecteur normal à ce plan est $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

Affirmation 2 : Il existe exactement une valeur de α telle que les droites (AC) et (d) soient parallèles.

Affirmation 3 : Une mesure de l'angle $\widehat{OAB}$ est 135°.

Affirmation 4 : Le projeté orthogonal du point A sur la droite (d) est le point H(1 ; 2 ; 2).

Affirmation 5 : La sphère de centre O et de rayon 1 rencontre la droite (d) en deux points distincts.

On rappelle que la sphère de centre Ω et de rayon r est l'ensemble des points de l'espace situés à une distance r de Ω.

Exercice 2 5 points

Une entreprise qui fabrique des jouets doit effectuer des contrôles de conformité avant leur commercialisation. Dans cet exercice, on s'intéresse à deux tests effectués par l'entreprise de jouets : un test *de fabrication* et un test *de sécurité*.

À la suite d'un grand nombre de vérifications, l'entreprise affirme que :

- 95 % des jouets réussissent le test de fabrication ;
- Parmi les jouets qui réussissent le test de fabrication, 98 % réussissent le test de sécurité ;
- 1 % des jouets ne réussissent aucun des deux tests.

On choisit au hasard un jouet parmi les jouets produits. On note :

- F l'évènement : « le jouet réussit le test de fabrication » ;
- S l'évènement : « le jouet réussit le test de sécurité ».

Partie A

1. À partir des données de l'énoncé, donner les probabilités $P(F)$ et $P_F(S)$.
2. a. Construire un arbre pondéré qui illustre la situation avec les données disponibles dans l'énoncé.

   b. Montrer que $P_{\overline{F}}\left(\overline{S}\right) = 0,2$.
3. Calculer la probabilité que le jouet choisi réussisse les deux tests.
4. Montrer que la probabilité que le jouet réussisse le test de sécurité vaut 0,97 arrondi au centième.
5. Lorsque le jouet a réussi le test de sécurité, quelle est la probabilité qu'il réussisse le test de fabrication ? Donner une valeur approchée du résultat au centième.

Partie B

On prélève au hasard dans la production de l'entreprise un lot de n jouets, où n est un entier strictement positif. On suppose que ce prélèvement se fait sur une quantité suffisamment grande de jouets pour être assimilé à une succession de n tirages indépendants avec remise.

On rappelle que la probabilité qu'un jouet réussisse le test de fabrication est égale à $0,95$.

Soit S_n la variable aléatoire qui compte le nombre de jouets ayant réussi le test de fabrication. On admet que S_n suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,95$.

1. Exprimer l'espérance et la variance de la variable aléatoire S_n en fonction de n.
2. Dans cette question, on pose $n = 150$.

   a. Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de $P(S_{150} = 145)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

   b. Déterminer la probabilité qu'au moins 94 % des jouets de ce lot réussissent le test de fabrication. Donner une valeur approchée du résultat à 10^{-3} près.
3. Dans cette question, l'entier naturel non nul n n'est plus fixé.

   Soit F_n la variable aléatoire définie par : $F_n = \dfrac{S_n}{n}$. La variable aléatoire F_n représente la proportion des jouets qui réussissent le test de fabrication dans un lot de n jouets prélevés.

   On note $E(F_n)$ l'espérance et $V(F_n)$ la variance de la variable aléatoire F_n.

   a. Montrer que $E(F_n) = 0,95$ et que $V(F_n) = \dfrac{0,0475}{n}$.

   b. On s'intéresse à l'évènement I suivant : « la proportion de jouets qui réussissent le test de fabrication dans un lot de n jouets est strictement comprise entre 93 % et 97 % ».

   En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer une valeur n de la taille du lot de jouets à prélever, à partir de laquelle la probabilité de l'évènement I est supérieure ou égale à $0,96$.

Exercice 3 — 5 points

Un patient doit prendre toutes les heures une dose de 2 ml d'un médicament.

On introduit la suite (u_n) telle que le terme u_n représente la quantité de médicament, exprimée en ml présente dans l'organisme immédiatement après n prises de médicament.

On a $u_1 = 2$ et

pour tout entier naturel n strictement positif : $u_{n+1} = 2 + 0,8u_n$.

Partie A

En utilisant ce modèle, un médecin cherche à savoir à partir de combien de prises du médicament la quantité présente dans l'organisme du patient est strictement supérieure à 9 mL.

1. Calculer la valeur u_2.
2. Montrer par récurrence que :

$$u_n = 10 - 8 \times 0{,}8^{n-1} \text{ pour tout entier naturel } n \text{ strictement positif.}$$

3. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et et donner une interprétation de ce résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Soit N un entier naturel strictement positif, l'inéquation $u_N \geqslant 10$ admet-elle des solutions ?

   Interpréter le résultat de cette question dans le contexte de l'exercice.
5. Déterminer à partir de combien de prises de médicament la quantité de médicament présente dans l'organisme du patient est strictement supérieure à 9 mL. Justifier votre démarche.

Partie B

En utilisant la même modélisation, le médecin s'intéresse à la quantité moyenne de médicament présente dans l'organisme du malade au cours du temps.

On définit pour cela la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n strictement positif par

$$S_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}.$$

On admet que la suite (S_n) est croissante.

1. Calculer S_2.
2. Montrer que pour tout entier naturel n strictement positif,

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 10n - 40 + 40 \times 0{,}8^n.$$

3. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.
4. On donne la fonction mystere suivante, écrite en langage Python :

```
def mystere(k) :
    n = 1
    s = 2
    while s < k :
        n = n + 1
        s = 10 - 40/n + (40*0.8**n)/n
    return n
```

   Dans le contexte de l'énoncé, que représente la valeur renvoyée par la saisie `mystere(9)` ?
5. Justifier que cette valeur est strictement supérieure à 10.

Exercice 4 5 points

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

et on appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. On définit la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$.

a. Montrer que $g'(x) = f(x)$ pour tout x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

b. Pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, calculer $f'(x)$ et montrer que :

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)}{4x\sqrt{x}}.$$

2. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en 0.

b. Interpréter graphiquement ce résultat.

3. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.

Dresser le tableau de variations de la fonction f en y faisant figurer les limites aux bornes de l'intervalle de définition.

c. Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$ et donner une valeur approchée à 10^{-1} près de cette solution.

4. On pose $I = \displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

a. Calculer I.

b. Interpréter graphiquement le résultat.

5. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et que :

$$f''(x) = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\left(x-3\sqrt{x}+3\right)}{8x^2\sqrt{x}}.$$

a. En posant $X = \sqrt{x}$, montrer que $x - 3\sqrt{x} + 3 > 0$ pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

b. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Corrigé : Asie 11 juin 2025

EXERCICE 1 **5 points**

Affirmation 1 : Fausse.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}\alpha-1\\2\\\alpha\end{pmatrix}$.

Quel que soit le réel α, ces coordonnées ne sont pas proportionnelles, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires, et ils définissent bien un plan.

Cependant, le repère étant orthonormé, on peut utiliser les coordonnées pour calculer un produit scalaire : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{\jmath} = (\alpha-1)\times 0 + 2\times 1 + \alpha\times 0 = 2$.

On constate que les vecteurs $\overrightarrow{\jmath}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas orthogonaux, donc $\overrightarrow{\jmath}$ n'est pas un vecteur normal au plan (ABC) : cette partie de l'affirmation est donc fausse.

Affirmation 2 : Fausse.

En interprétant le système de représentation paramétrique, la droite (d) est dirigée par $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$. On rappelle : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}\alpha-1\\2\\\alpha\end{pmatrix}$.

Pour que les droites soient parallèles, il faudrait que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AC}$ soient proportionnels, or, ici, ils ont la même ordonnée, donc ils devraient être égaux.

Or, si on choisit α égal à 1, les altitudes seront égales, mais pas les abscisses, si on choisit α égal à 2, alors les abscisses seront égales, mais pas les altitudes, et, pour tout autre réel α, les abscisses et altitudes seront différentes entre les deux vecteurs.

Quel que soit le réel α, les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont donc non colinéaires, et les droites ne sont pas parallèles : l'affirmation est donc fausse.

Affirmation 3 : Vraie.

O étant l'origine du repère, les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ sont celles du point A, donc celles de $\overrightarrow{AO}$ sont : $\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$. On rappelle $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

On a donc, dans le repère orthonormé : $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB} = -1\times 1 + (-1)\times 0 + 0\times 0 = -1$.

Par ailleurs, on a : $AO = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2+0^2} = \sqrt{2}$, et $AB = \sqrt{1^2+0^2+0^2} = \sqrt{1} = 1$.

On a donc aussi : $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB} = AO\times AB\times\cos\left(\widehat{OAB}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\widehat{OAB}\right)$.

En égalant les deux expressions du produit scalaire, il vient : $-1 = \sqrt{2}\cos\left(\widehat{OAB}\right)$,

ce qui équivaut à : $\cos\left(\widehat{OAB}\right) = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$.

On reconnaît ici l'opposé du cosinus d'un angle de $\dfrac{\pi}{4}$, ce qui est donc le cosinus d'un angle de mesure $\pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$, soit effectivement 135°.

Affirmation 4 : Fausse.

Avec les coordonnées données pour H et la représentation paramétrique de (d), pour avoir $x_H = 1+t$, il faut avoir $t=0$, et donc les ordonnées et altitudes ne correspondront pas : le point H n'est pas sur la droite (d), donc il n'est pas le projeté orthogonal de A sur (d).

Affirmation 5 : Vraie

Soit t un réel quelconque et M_t le point de paramètre t sur la droite (d).

La distance OM_t est donnée par :

$OM_t = \sqrt{(1+t)^2+(2t)^2+(-t)^2} = \sqrt{1+2t+t^2+4t^2+t^2} = \sqrt{6t^2+2t+1}$.

On a donc :
$$\begin{aligned} OM_t = 1 &\iff \sqrt{6t^2+2t+1} = 1\\ &\iff 6t^2+2t+1 = 1\\ &\iff 6t^2+2t = 0\\ &\iff 2t(3t+1) = 0\\ &\iff 2t = 0 \quad \text{ou} \quad 3t+1 = 0\\ &\iff t = 0 \quad \text{ou} \quad t = -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

L'équation a deux solutions, il y a donc exactement deux points de la droite (d) qui sont sur la sphère : les points de paramètre 0 et $-\dfrac{1}{3}$, l'affirmation est vraie.

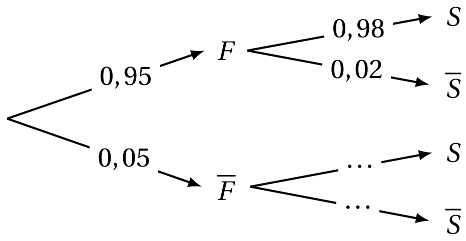
Exercice 2 — 5 points

Puisqu'on choisit un jouet au hasard dans la production, on est en situation d'équiprobabilité, et donc les proportions sont assimilables à des probabilités.

Partie A

1. D'après l'énoncé 95 % des jouets réussissent le test de fabrication et, parmi les jouets qui réussissent le test de fabrication, 98 % réussissent le test de sécurité, donc $P(F) = 0,95$ et $P_F(S) = 0,98$.

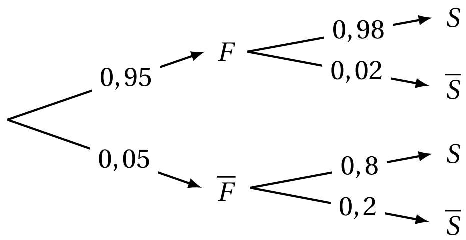
2. **a.** Un arbre pondéré qui illustre la situation avec les données disponibles dans l'énoncé (ainsi que les probabilités d'évènement contraire, triviales) est :



b. D'après l'énoncé 1 % des jouets ne réussissent aucun des deux tests donc $P\left(\overline{F} \cap \overline{S}\right) = 0,01$.

$$P_{\overline{F}}\left(\overline{S}\right) = \frac{P\left(\overline{F} \cap \overline{S}\right)}{P\left(\overline{F}\right)} = \frac{0,01}{0,05} = 0,2$$

L'arbre complet est donc :



3. $P\left(F \cap S\right) = P(F) \times P_F(S) = 0,95 \times 0,98 = 0,931$

La probabilité que le jouet choisi réussisse les deux tests est égale à $0,93$.

4. Les évènements F et $\overline{F}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales : $P(S) = P\left(F \cap S\right) + P\left(\overline{F} \cap S\right)$

On a donc : $P(S) = 0,931 + 0,05 \times 0,8 = 0,971$.

La probabilité que le jouet réussisse le test de sécurité vaut, $0,97$ arrondi au centième.

5. $P_S(F) = \dfrac{P(F \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0,931}{0,971} \approx 0,9588$

La probabilité qu'un jouet réussisse le test de fabrication sachant qu'il a réussi le test de sécurité vaut $0,96$, arrondi au centième.

Partie B

1. S_n suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,95$ donc :

$E\left(S_n\right) = n \times p = 0,95n$ et $V(X) = np(1-p) = n \times 0,95 \times 0,05 = 0,0475n$.

2. Dans cette question, on pose $n = 150$.

a.
$$\begin{aligned} P\left(S_{150} = 145\right) &= \binom{150}{145} \times 0,95^{145} \times 0,05^{150-145}. \\ &= 591\,600\,030 \times 0,95^{145} \times 0,05^{5} \\ &\approx 0,10884 \end{aligned}$$

Finalement, avec les consignes d'arrondi : $P\left(S_{150} = 145\right) \approx 0,109$

Dans le contexte de l'exercice, dans environ 10,9% des cas, 145 jouets sur les 150 du lot réussissent le test de fabrication.

b. 94% des jouets de ce lot correspond à 141 jouets.

À l'aide de la calculatrice : $P\left(S_{150} \geqslant 141\right) \approx 0,78088$

La probabilité qu'au moins 94% des jouets de ce lot réussissent le test de fabrication vaut $0,781$ à 10^{-3} près.

3. Dans cette question, l'entier naturel non nul n n'est plus fixé.

a. D'après les propriétés sur l'espérance d'une somme de variables aléatoires :

$$E(F_n) = E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{E(S_n)}{n} = \frac{0,95n}{n} = 0,95.$$

D'après les propriétés sur la variance d'une somme de variables aléatoires indépendantes :

$$V(F_n) = V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{V(S_n)}{n^2} = \frac{0,0475n}{n^2} = \frac{0,0475}{n}.$$

b. L'évènement « $0,93 < F_n < 0,97$ » revient à $|F_n - 0,95| < 0,02$ et

$$P\Big(|F_n - 0,95| < 0,02\Big) = 1 - P\Big(|F_n - 0,95| \geqslant 0,02\Big).$$

On veut que $P\Big(|F_n - 0,95| \geqslant 0,02\Big) \geqslant 0,96$

On veut donc que $P\Big(|F_n - 0,95| < 0,02\Big) \leqslant 0,04$

Or, pour tout réel $t > 0$, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$$P\Big(|F_n - E(F_n)| \geqslant t\Big) \leqslant \frac{V(F_n)}{t^2}$$

Pour $t = 0,02$ on obtient : $P\Big(|F_n - 0,95| \geqslant 0,02\Big) \leqslant \dfrac{0,475}{n \times 0,02^2}$.

On veut donc que : $\dfrac{475}{4n} \leqslant 0,04 \iff \dfrac{11875}{4} \leqslant n$

$$\iff 2968 + \frac{3}{4} \leqslant n$$

L'inégalité est donc vraie pour tout entier $n \geqslant 2969$.

À partir de 2969 jouets prélevés, la probabilité de l'évènement I est supérieure ou égale à $0,96$.

EXERCICE 3 — 5 points

Partie A

1. On a : $u_2 = 2 + 0,8u_1 = 2 + 0,8 \times 2 = 2 + 1,6 = 3,6$.

Après deux prises du médicament, le patient a 3,6 mL de médicament dans son organisme.

2. Pour tout entier naturel non nul n, on pose P_n, l'affirmation : « $u_n = 10 - 8 \times 0,8^{n-1}$ ».

Initialisation : On a, d'une part : $u_1 = 2$, d'après l'énoncé.

Et, d'autre part : $10 - 8 \times 0,8^{1-1} = 10 - 8 \times 0,8^0 = 10 - 8 \times 1 = 2$.

On constate que pour $n = 1$, l'affirmation P_1 est vraie.

Hérédité : Pour n entier naturel non nul, on suppose l'affirmation P_n vraie, c'est-à-dire : « $u_n = 10 - 8 \times 0,8^{n-1}$ ».

On veut montrer que cela implique que l'affirmation P_{n+1} est vraie.

On a :
$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2 + 0,8u_n \quad \text{par définition de la suite } (u_n) \\ &= 2 + 0,8\Big(10 - 8 \times 0,8^{n-1}\Big) \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= 2 + 0,8 \times 10 - 0,8 \times 8 \times 0,8^{n-1} \\ &= 2 + 8 - 8 \times 0,8 \times 0,8^{n-1} \\ &= 10 - 8 \times 0,8 \times 0,8^{n} \quad \text{c'est l'égalité } P_{n+1} \end{aligned}$$

Conclusion : L'affirmation est vraie au rang 1, et, pour tout rang naturel non nul n, si P_n est vraie alors P_{n+1} l'est aussi, donc, en vertu du principe de démonstration par récurrence, on a donc démontré que P_n- est vraie pour tout entier naturel n non nul, autrement dit, on a établi une expression explicite du terme général de la suite.

3. Par connaissance des limites des suites géométriques, comme on a $-1 < 0,8 < 1$, on en déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,8^{n-1} = \lim\limits_{n \to +\infty} -8 \times 0,8^{n-1} = 0$.

Par limite de la somme, on en déduit : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} = 10 + 0 = 10$.

La suite (u_n) converge donc vers 10.

Dans le contexte de l'exercice, cela signifie qu'au bout d'un nombre important de prises de ce médicament, l'organisme du patient contiendra une quantité de médicament qui tend vers les 10 mL.

4. Soit N un entier naturel non nul, étudions l'inéquation :

$$\begin{aligned} u_N \geqslant 10 &\iff 10 - 8 \times 0,8^{N-1} \geqslant 10 \\ &\iff -8 \times 0,8^{N-1} \geqslant 0 \end{aligned}$$

Le membre de gauche est un réel strictement négatif (car 8 et 0,8 sont strictement positifs) et ne peut être supérieur ou égal à 0.

L'inéquation n'admet donc pas de solution.

Dans le contexte de l'exercice, cela peut s'interpréter sur le comportement de la suite, qui est donc majorée (strictement) par 10, ou par la quantité de médicament dans l'organisme de l'individu qui est toujours strictement inférieure à 10 mL, quel que soit le nombre de prises du médicament enchaînées.

5. On résout une inéquation différente, avec n un entier naturel non nul :

$$\begin{aligned} u_n > 9 &\iff 10 - 8 \times 0,8^{n-1} > 9 \\ &\iff -8 \times 0,8^{n-1} > -1 \\ &\iff 0,8^{n-1} < \frac{1}{8} \quad \text{car } -8 < 0 \\ &\iff \ln\left(0,8^{n-1}\right) < \ln\left(\frac{1}{8}\right) \quad \text{la fonction ln étant strictement croissante sur } \mathbb{R}^{*+} \\ &\iff (n-1)\ln(0,8) < -\ln(8) \quad \text{d'après les propriétés de la fonction ln} \\ &\iff n - 1 > -\frac{\ln(8)}{\ln(0,8)} \quad \text{car } \ln(0,8) < 0 \\ &\iff n > 1 - \frac{\ln(8)}{\ln(0,8)} \end{aligned}$$

Or, $1 - \dfrac{\ln(8)}{\ln(0,8)} \approx 10,3$.

Comme on résout pour n entier naturel non nul, les solutions sont les entiers supérieurs ou égaux à 11.

C'est à partir de 11 prises successives du médicament que la quantité de celui-ci dans l'organisme du patient dépasse strictement les 9 mL.

Partie B

1. On a $S_2 = \dfrac{u_1 + u_2}{n} = \dfrac{2 + 3,6}{2} = 2,8$.

2. Pour donner l'expression explicite de la somme, on utilisera l'expression explicite du terme général de la suite (u_n), établi à la question **A. 2.**.

La somme est une somme de n termes consécutifs, de u_1 à u_n :

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \cdots + u_n &= 10 - 8 \times 0,8^0 + 10 - 8 \times 0,8^1 + \cdots + 10 - 8 \times 0,8^{n-1} \\ &= 10 + 10 + \cdots + 10 - 8 \times \left(0,8^0 + 0,8^1 + \cdots + 0,8^{n-1}\right) \\ &= 10 \times n - 8 \times 1 \times \frac{1 - 0,8^n}{1 - 0,8} \quad \text{formule connue} \\ &= 10n - \frac{8}{0,2} \times \left(1 - 0,8^n\right) \\ &= 10n - 40 \times \left(1 - 0,8^n\right) \\ &= 10n - 40 + 40 \times 0,8^n \quad \text{en développant} \end{aligned}$$

On arrive donc bien à l'expression annoncée.

3. On déduit de la question précédente que, pour tout n entier naturel non nul, on a : $S_n = 10 - \dfrac{40}{n} + \dfrac{40}{n} \times 0,8^n$.

On a donc, par limite du quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{40}{n} = 0$,

de plus, par limite des suites géométriques, comme $-1 < 0,8 < 1$: $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,8^n = 0$.

Ainsi, par limite de la somme et du produit, on en déduit :

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 10 - \dfrac{40}{n} + \dfrac{40}{n} \times 0,8^n = 10$.

La quantité moyenne de médicament présente dans l'organisme du patient tend elle aussi vers 10 mL.

4. La fonction mystère est une fonction de seuil : elle détermine l'indice seuil pour lequel la valeur de S_n franchit le seuil `k` pour la première fois.

`mystere(9)` renvoie donc le premier nombre entier naturel non nul n pour lequel la quantité moyenne de médicament dans l'organisme du patient depuis le début de la prise devient supérieure ou égale à 9 mL.

5. Cette valeur est donc nécessairement strictement supérieure à 10, puisque l'on a établi à la fin de la **partie A** que c'est seulement à la onzième prise du médicament que la quantité **à ce moment là** dans le corps du patient dépasse les 9 mL.

Avant $n = 11$, les valeurs de la suite (u_n) sont donc toutes inférieures strictement à 9, et donc leur moyenne le sera aussi.

Il est donc impossible que S_n soit supérieur à 9 pour tout entier naturel non nul n, pour n inférieur ou égal à 10.

La fonction `mystère` doit donc renvoyer une valeur (un indice) strictement supérieur à 10. Elle renverra en réalité 40 (on a $S_{39} \approx 9,97$ et $S_{40} \approx 9,0001$).

EXERCICE 4 — 5 points

On considère f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$ et on appelle C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. On définit la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = e^{\sqrt{x}}$

a. La fonction g est continue et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, donc $\forall x \in]0\,;\,+\infty[$,

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times e^{\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = f(x).$$

b. La fonction f est continue et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, donc $\forall x \in]0\,;\,+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}} \times 2\sqrt{x} - e^{\sqrt{x}} \times 2\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x})^2} = \frac{e^{\sqrt{x}} - \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}{4x} = \frac{\frac{\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}}{4x} = \frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{4x\sqrt{x}}.$$

2. a. $\lim\limits_{x\to0} e^{\sqrt{x}} = 1$ et $\lim\limits_{x\to0} 2\sqrt{x} = 0$ avec $\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} > 0$ donc $\lim\limits_{x\to0} f(x) = +\infty$.

b. Donc C_f admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

3. a. D'après les croissances comparées, $\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{e^u}{u} = +\infty$ donc par composition de limites (en posant $u(x) = \sqrt{x}$) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b. $\forall x \in]0\,;\,+\infty[$, $e^{\sqrt{x}} > 0$ et $4x\sqrt{x} > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $\sqrt{x} - 1$.

$\sqrt{x} - 1 \geqslant 0 \iff \sqrt{x} \geqslant 1 \iff x \geqslant 1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{\mathrm{e}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

c. La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[1~;~+\infty[$ à valeurs dans $\left[\dfrac{\mathrm{e}}{2}~;~+\infty\right[$. Or $2 \in \left[\dfrac{\mathrm{e}}{2}~;~+\infty\right[$ (car $\dfrac{\mathrm{e}}{2} < 2$) donc d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution notée α dans $[1;+\infty[$.

À la calculatrice : $\alpha \approx 4,6$.

4. $I = \displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

a. $\forall x \in [1~;~2]$, $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \times \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$. En remarquant que la dérivée de la fonction g est la fonction f, donc g est une primitive de f.

Donc $I = \displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx = \left[g(x)\right]_1^2 = \left[\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\right]_1^2 = \mathrm{e}^{\sqrt{2}} - \mathrm{e}$

b. L'aire du domaine $\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$ est égale à $\mathrm{e}^{\sqrt{2}} - \mathrm{e}$.

I est donc laire du domaine compris entre $\mathscr{C}_f$, laxe des abscisses et les droites déquation $x = 1$ et $x = 2$.

5. $\forall x \in]0~;~+\infty[$, $f''(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}(x - 3\sqrt{x} + 3)}{8x^2\sqrt{x}}$

a. On pose $\forall x \in]0~;~+\infty[$, $X = \sqrt{x}$.

$x - 3\sqrt{x} + 3 = X^2 - 3X + 3$.

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 3 = -3 < 0$ donc $\forall X \in]0~;~+\infty[$, $X^2 - 3X + 3 > 0$ donc $\forall x \in]0;+\infty[$, $x - 3\sqrt{x} + 3 > 0$.

b. $\forall x \in]0;+\infty[$, $e^{\sqrt{x}} > 0$ et $x - 3\sqrt{x} + 3 > 0$ et $8x^2\sqrt{x} > 0$ donc $f''(x) > 0$.

La fonction f est convexe sur $]0~;~+\infty[$.

Sujet : Centres étrangers 12 2025

Exercice 1 6 points

Cet exercice est constitué de trois parties indépendantes

Un magasin est équipé de caisses automatiques en libre-service où le client scanne lui- même ses articles. Le logiciel d'une caisse déclenche régulièrement des demandes de vérification. Un employé du magasin effectue alors un contrôle.

Partie A

Le contrôle peut être

- soit « total » : l'employé du magasin scanne alors à nouveau l'ensemble des articles du client;
- soit « partiel » : l'employé choisit alors un ou plusieurs articles du client pour vérifier qu'ils ont bien été scannés.

Si un contrôle est déclenché, il s'agit une fois sur dix d'un contrôle total.

Lorsqu'un contrôle total est déclenché, une erreur du client est détectée dans 30 % des cas.

Lorsqu'un contrôle partiel est effectué, dans 85 % des cas, il n'y a pas d'erreur.

Un contrôle est déclenché à une caisse automatique.

On considère les évènements suivants :

- T : « Le contrôle est un contrôle total »;
- E : « Une erreur est détectée lors du contrôle ».

On notera $\overline{T}$ et $\overline{E}$ les évènements contraires de T et E.

1. Construire un arbre pondéré représentant la situation puis déterminer $P\left(\overline{T} \cap E\right)$.
2. Calculer la probabilité qu'une erreur soit détectée lors d'un contrôle.
3. Déterminer la probabilité qu'un contrôle total ait été effectué, sachant qu'une erreur a été détectée. *On donnera la valeur arrondie au centième.*

Partie B

Sur une journée donnée, une caisse automatique déclenche 15 contrôles. La probabilité qu'un contrôle mette en évidence une erreur est $p = 0,165$. La détection d'une erreur lors d'un contrôle est indépendante des autres contrôles.

On note X la variable aléatoire égale au nombre d'erreurs détectées lors des contrôles de cette journée.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
2. Déterminer la probabilité qu'exactement 5 erreurs soient détectées. *On donnera la valeur arrondie au centième.*
3. Déterminer la probabilité qu'au moins une erreur soit détectée. *On donnera la valeur arrondie au centième.*
4. On souhaite modifier le nombre de contrôles déclenchés par la caisse de manière à ce que la probabilité qu'au moins une erreur soit détectée chaque jour soit supérieure à 99 %.

   Déterminer le nombre de contrôles que doit déclencher la caisse chaque jour pour que cette contrainte soit respectée.

Partie C

Le magasin comporte trois caisses automatiques identiques qui, lors d'une journée, ont chacune déclenché 20 contrôles. On note X_1, X_2 et X_3 les variables aléatoires associant à chacune des caisses le nombre d'erreurs détectées lors de cette journée.

On admet que les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes entre elles et suivent chacune une loi binomiale $\mathscr{B}(20\ ;\ 0,165)$.

1. Déterminer les valeurs exactes de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire X_1.
2. On définit la variable aléatoire S par $S = X_1 + X_2 + X_3$.

   Justifier que $E(S) = 9,9$ et que $V(S) = 8,2665$.

   Pour cette question, on utilisera 10 comme valeur de $E(S)$.

   À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que la probabilité que le nombre total d'erreurs sur la journée soit strictement compris entre 6 et 14 est supérieure à $0,48$.

Exercice 2 QCM 4 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Les quatre questions sont indépendantes.

Pour chaque question, une seule réponse correcte. Aucune justification nest demandée.

Dans tout l'exercice, on considère que l'espace est muni d'un repère orthonormé

$\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

On considère :

- les points $\mathrm{A}(-3\ ;\ 1\ ;\ 4)$ et $\mathrm{B}(1\ ;5\ ;2)$
- le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $4x + 4y - 2z + 3 = 0$
- la droite (d) dont une représentation paramétrique est $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -6+3t \\ y & = & 1 \\ z & = & 9-5t \end{array}\right.$, où $t \in \mathbb{R}$.

1. Les droites (AB) et (d) sont :
   - **a.** sécantes non perpendiculaires.
   - **b.** perpendiculaires.
   - **c.** non coplanaires.
   - **d.** parallèles.
2. La droite (AB) est :
   - **a.** incluse dans le plan $\mathscr{P}$.
   - **b.** strictement parallèle au plan $\mathscr{P}$.
   - **c.** sécante et non orthogonale au plan $\mathscr{P}$.
   - **d.** orthogonale au plan $\mathscr{P}$.
3. On considère le plan P' d'équation cartésienne $2x + y + 6z + 5 = 0$.

   Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont :
   - **a.** sécants et non perpendiculaires.

b. perpendiculaires.

c. confondus.

d. strictement parallèles.

4. On considère le point C(0 ; 1 ; −1). La valeur de l'angle $\widehat{\text{BAC}}$ arrondie au degré est :

a. 90°

b. 51°

c. 39°

d. 0°

Exercice 3 — 6 points

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 4\ln(x+1) - \frac{x^2}{25}$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$.

1. Déterminer la limite de la fonction f en -1.

2. Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{100 - 2x - 2x^2}{25(x+1)}$$

3. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ puis en déduire que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[2 ; 6{,}5]$.

4. On considère h la fonction définie sur l'intervalle $[2 ; 6{,}5]$ par $h(x) = f(x) - x$.

On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction h :

x	2	$m \approx 2{,}364$	$6{,}5$
$h(x)$		$M \approx 2{,}265$	
	$h(2)$		$h(6{,}5)$

Montrer que léquation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [2\ ;\ 6{,}5]$.

5. On considère le script suivant, écrit en langage Python :

```
from math import *

def f(x) :
    return 4*log(1+x)-(x**2)/25

def bornes(n) :
    p = 1/10**n
    x = 6
    while f(x)-x > 0 :
        x = x + p
    return (x-p, x)
```

On rappelle qu'en langage Python :

- la commande log(x) renvoie la valeur $\ln x$;
- la commande c∗∗d renvoie la valeur de c^{d}.

a. Donner les valeurs renvoyées par la commande bornes(2).

On donnera les valeurs arrondies au centième.

b. Interpréter ces valeurs dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Dans cette partie, on pourra utiliser les résultats obtenus dans la partie A.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$, et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Montrer par récurrence que pour tout n entier naturel,

$$2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} < 6,5.$$

2. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ.

3. On rappelle que le réel α, défini dans la partie A, est la solution de l'équation $h(x) = 0$ sur l'intervalle $[2\,;6{,}5]$.

Justifier que $\ell = \alpha$.

Exercice 4 — 4 points

Partie A

On considère l'équation différentielle

$$(E_1) : \quad y' + 0{,}48y = \frac{1}{250},$$

où y est une fonction de la variable t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

1. On considère la fonction constante h définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $h(t) = \dfrac{1}{120}$.

Montrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E_1).

2. Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle $y' + 0,48y = 0$.

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_1).

Partie B

On s'intéresse à présent à l'évolution d'une population de bactéries dans un milieu de culture.

À un instant $t = 0$, on introduit une population initiale de 30 000 bactéries dans le milieu. On note $p(t)$ la quantité de bactéries, exprimée en millier d'individus, présente dans le milieu après un temps t, exprimé en heure.

On a donc $p(0) = 30$.

On admet que la fonction p définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ est dérivable, strictement positive sur cet intervalle et qu'elle est solution de l'équation différentielle (E_2) :

$$p' = \frac{1}{250} p \times (120 - p)$$

Soit y la fonction strictement positive sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ telle que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, on a $p(t) = \dfrac{1}{y(t)}$.

1. Montrer que si p est solution de l'équation différentielle (E_2), alors y est solution de l'équation différentielle (E_1) : $y' + 0{,}48y = \dfrac{1}{250}$.
2. On admet réciproquement que, si y est une solution strictement positive de l'équation différentielle (E_1), alors $p = \dfrac{1}{y}$ est solution de l'équation différentielle (E_2).

   Montrer que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, on a :

   $$p(t) = \frac{120}{1 + K\mathrm{e}^{-0{,}48t}} \text{ avec } K \text{ une constante réelle.}$$

3. En utilisant la condition initiale, déterminer la valeur de K.
4. Déterminer $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} p(t)$. En donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.
5. Déterminer le temps nécessaire pour que la population de bactéries dépasse 60 000 individus.

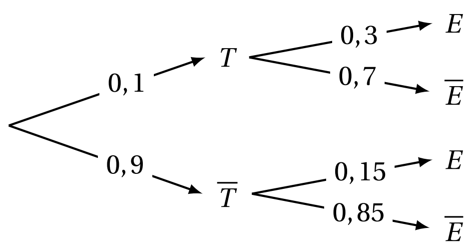
   On donnera le résultat sous la forme d'une valeur arrondie exprimée en heures et minutes.

Corrigés : Centres étrangers 12 2025

EXERCICE 1 **6 points**

Partie A :

1. Un arbre pondéré représentant la situation est :



   $P\left(\overline{T} \cap E\right) = P\left(\overline{T}\right) \times P_{\overline{T}}(E) = 0{,}9 \times 0{,}15 = 0{,}135.$

2. Les évènements T et $\overline{T}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales : $P(E) = P\left(T \cap E\right) + P\left(\overline{T} \cap E\right)$

   On a donc : $P(E) = 0{,}1 \times 0{,}3 + 0{,}135 = 0{,}165.$

   La probabilité qu'une erreur soit détectée lors du contrôle est égale à $0{,}165$.

3. $P_E(T) = \dfrac{P(T \cap E)}{P(E)} = \dfrac{0{,}1 \times 0{,}3}{0{,}165} \approx 0{,}1818.$

   La probabilité qu'un contrôle total ait été effectué, sachant qu'une erreur a été détectée vaut environ $0{,}18$, arrondie au centième.

Partie B : Sur une journée donnée, une caisse automatique déclenche 15 contrôles. La probabilité qu'un contrôle mette en évidence une erreur est $p = 0{,}165$. La détection d'une erreur lors d'un contrôle est indépendante des autres contrôles.

On note X la variable aléatoire égale au nombre d'erreurs détectées lors des contrôles de cette journée.

1. Sur une journée donnée, une caisse automatique déclenche 15 contrôles. La probabilité qu'un contrôle mette en évidence une erreur est $p = 0{,}165$ donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = 0{,}165$.

2. $$\begin{aligned} P(X = 5) &= \binom{15}{5} \times 0{,}165^5 \times 0{,}835^{15-5}. \\ &= 3\,003 \times 0{,}165^5 \times 0{,}835^{10} \\ &\approx 0{,}0605 \end{aligned}$$

Finalement, avec les consignes d'arrondi : $P(X=5) \approx 0,06$

La probabilité qu'exactement 5 erreurs soient détectées vaut $0,06$.

3. $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0,835^{15} \approx 0,9331$.

La probabilité qu'au moins une erreur soit détectée vaut $0,93$.

4. Soit n le nombre de contrôles effectués chaque jour.

Soit Y la variable aléatoire égale au nombre d'erreurs détectées lors des contrôles de cette journée.

Y suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,165$.

$P(Y \geqslant 1) = 1 - P(Y=0) = 1 - 0,835^n$

On souhaite que la probabilité qu'au moins une erreur soit détectée chaque jour soit supérieure à 99 %.

On veut donc que $1 - 0,835^n \geqslant 0,99$.

$1 - 0,835^n \geqslant 0,99 \iff 0,01 \geqslant 0,835^n$

$\iff \ln(0,01) \geqslant \ln\left(0,835^n\right)$ car la fonction logarithme est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$

$\iff \ln(0,01) \geqslant n\ln(0,835)$

$\iff \dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,835)} \leqslant n$ car $\ln(0,835) < 0$ donc son inverse aussi

or $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,835)} \approx 25,5$

Il faut déclencher 26 contrôles chaque jour.

Partie C :

Le magasin comporte trois caisses automatiques identiques qui, lors d'une journée, ont chacune déclenché 20 contrôles. On note X_1, X_2 et X_3 les variables aléatoires associant à chacune des caisses le nombre d'erreurs détectées lors de cette journée.

On admet que les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes entre elles et suivent chacune une loi binomiale $\mathscr{B}(20\,;\,0,165)$.

1. X_1 suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,175$.

Donc $E(X_1) = n \times p = 20 \times 0,165 = 3,3$

et $V(X_1) = n \times p \times (1-p) = 20 \times 0,165 \times 0,835 = 2,7555$

2. $E(S) = E(X_1 + X_2 + X_3) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 3 \times E(X_1) = 3 \times 3,3 = 9,9$

Les variables X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes donc :

$V(S) = V(X_1 + X_2 + X_3) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) = 3 \times V(X_1) = 3 \times 2,7555 = 8,2665$.

3. L'évènement « $6 < S < 14$ » revient à $|S - 10| < 4$ et

$P\left(|S-10| < 4\right) = 1 - P\left(|S-10| \geqslant 4\right)$.

Or, pour tout réel $t > 0$, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$P\left(|S - E(S)| \geqslant t\right) \leqslant \dfrac{V(S)}{t^2}$

Pour $t = 4$ on obtient : $P\left(|S-10| \geqslant 4\right) \leqslant \dfrac{8,2665}{4^2}$.

D'où $P\left(|S-10| < 4\right) = 1 - P\left(|S-10| \geqslant 4\right) \geqslant 1 - \dfrac{8,2665}{16}$.

Or $1 - \dfrac{8,2665}{16} \approx 0,4833$

donc la probabilité que le nombre total d'erreurs sur la journée soit strictement compris entre 6 et 14 est bien supérieure à $0,48$.

EXERCICE 2 **4 points**

1. **Les droites (AB) et (d) sont : sécantes non perpendiculaires.**

   Un vecteur directeur de la droite (AB) est le vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$. Le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ est donc aussi un vecteur directeur de la droite (AB).

   Un vecteur directeur de la droite (d) est $\overrightarrow{u'}\begin{pmatrix}3\\0\\-5\end{pmatrix}$.

   Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ ne sont pas colinéaires donc les droites (AB) et (d) ne sont pas parallèles.

   Le repère est orthonormé, on peut donc utiliser les coordonnées des vecteurs pour calculer le produit scalaire.

   $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u'} = 2\times 3+0\times 2-1\times(-5) = 11 \neq 0$

   donc les droites (AB) et (d) ne sont pas perpendiculaires.

   Une équation paramétrique de la droite (AB) de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ et passant par le point A$(-3;1;4)$ est :

   $$\begin{cases} x=-3+2s \\ y=1+2s \\ z=4-s \end{cases} \qquad \text{où } s\in\mathbb{R}.$$

   Les deux droites sont sécantes si et seulement si le système suivant admet une unique solution :

   $$\begin{cases} -3+2s=-6+3t \\ 1+2s=1 \\ 4-s=9-5t \end{cases} \iff \begin{cases} 2s-3t=-3 \\ s=0 \\ s-5t=-5 \end{cases} \iff \begin{cases} -3t=-3 \\ s=0 \\ -5t=-5 \end{cases} \iff \begin{cases} t=1 \\ s=0 \\ t=1 \end{cases}$$

   Le système admet une unique solution donc les droites sont sécantes.

2. **La droite(AB) est orthogonale au plan $\mathscr{P}$.**

   Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$ est $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$ soit le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

   La droite (AB) est donc orthogonal au plan $\mathscr{P}$.

3. **Les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont perpendiculaires.**

   Un vecteur normal au plan $\mathscr{P}'$ est $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}2\\1\\6\end{pmatrix}$.

   Les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires donc les plans ne sont pas parallèles.

   On est dans un repère orthonormé, on peut donc utiliser les coordonnées pour calculer le produit scalaire.

   $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{n'} = 4\times 2+4\times 1-2\times(-6) = 8+4-12 = 0$

   Les vecteurs normaux sont orthogonaux donc les plans sont perpendiculaires.

4. **La valeur de l'angle $\widehat{\text{BAC}}$ arrondie au degré est $51°$.**

   On a : $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix}3\\0\\-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$.

   On est dans un repère orthonormé donc on peut utiliser les coordonnées pour calculer les longueurs et le produit scalaire.

Calculons le produit scalaire de ces deux vecteurs de deux manières différentes :

d'une part : $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 3 \times 4 + 0 \times 4 - 5 \times (-2) = 22$

d'autre part :

AC= $\sqrt{(-3)^2 + 0^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$ et AB= $\sqrt{4^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{36} = 6$

On a donc $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) = 6\sqrt{34}\cos\left(\widehat{BAC}\right)$

D'où : $22 = 6\sqrt{34}\cos\left(\widehat{BAC}\right)$, donc $\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \dfrac{22}{6\sqrt{34}}$

D'où $\widehat{BAC} \approx 51°$

EXERCICE 3 **6 points**

Partie A :

1. D'une part : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^+} x + 1 = 0^+ \\ \lim\limits_{X \to 0} \ln X = -\infty \end{cases}$ donc par composition $\lim\limits_{x \to -1} 4\ln(x+1) = -\infty$

D'autre part, $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{-x^2}{25} = -\dfrac{1}{25}$

donc par somme $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty$

2. f est dérivable sur $]-1 ; +\infty[$.

f est de la forme $4\ln(u) - v$ avec $u(x) = x + 1$ et $v(x) = \dfrac{x^2}{25}$.

On a $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \dfrac{2x}{25}$

Or $f' = 4\dfrac{u'}{u} - v'$ donc :

Pour tout x appartenant à l'intervalle $]-1; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = 4\frac{1}{x+1} - \frac{2x}{25} = \frac{4 \times 25 - (x+1)2x}{25(x+1)} = \frac{100 - 2x - 2x^2}{25(x+1)}$$

3. Pour tout x appartenant à l'intervalle $]-1; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{100 - 2x - 2x^2}{25(x+1)}$$

$25(x+1) > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $100 - 2x - 2x^2$, fonction polynôme du second degré donc le coefficient dominant (-2) est négatif.

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 100 \times (-2) = 804 > 0$

$100 - 2x - 2x^2 = 0$ admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{804}}{2(-2)} = \frac{-1 + \sqrt{201}}{2} \approx 6,6$$

et $x_2 = \dfrac{2 + \sqrt{804}}{2(-2)} = \dfrac{-1 - \sqrt{201}}{2} \approx -7,6 < -1$

On obtient donc le tableau de variations suivant :

x	-1			x_1		$+\infty$
signe de $f'(x)$	||		$+$	0	$-$	
variations de f	||	$-\infty$	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	

$[2 ; 6,5] \subset]-1 ; x_1[$ donc f est strictement croissante sur $[2 ; 6,5]$.

4. $h(2) = f(2) - 2 = 4\ln(2+1) - \dfrac{2^2}{25} - 2 \approx 2,23.$

Sur l'intervalle $[2\ ;\ m]$ la fonction h est strictement croissante, or $h(2) > 0$ donc sur $[2\ ;\ m]$, $h(x) > 0$ et l'équation $h(x) = 0$ n'admet pas de solution sur cet intervalle.

Sur l'intervalle $[m\ ;\ 6,5]$, la fonction h est strictement décroissante et continue.

$h(m) = M \approx 2,265 > 0$

et $h(6,5) = 4\ln(6,5+1) - \dfrac{6,5^2}{25} - 6,5 \approx -0,13 < 0$

0 est donc une valeur intermédiaire entre $h(m)$ et $h(6,5)$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotone, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[m\ ;\ 6,5]$.

Finalement, l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[2\ ;\ 6,5]$.

5. **a.** Avec la calculatrice on trouve que les valeurs renvoyées par la commande bornes (2) sont : (6.36, 6.37)

b. Dans le contexte de l'exercice, un encadrement de α est $6,36 < \alpha < 6,37$.

Partie B :

1. Pour tout entier naturel n, on pose P_n, l'affirmation : « $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6,5$. ».

Initialisation : On a, d'une part : $u_0 = 2$,

Et, d'autre part : $u_1 = f(u_0) = f(2) \approx 4,23$

Donc $2 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 6,5$

Pour $n = 0$, l'affirmation P_0 est vraie.

Hérédité : Soit n naturel , tel que l'affirmation P_n est vraie, c'est-à-dire :

« $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6,5$ ».

On veut montrer que cela implique que l'affirmation P_{n+1} est vraie.

Par hypothèse de récurrence $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 6,5$

Or la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[2\ ;\ 6,5]$ donc :

$f(2) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(6,5)$

or $f(2) \approx 4,23 > 2$ et $f(6,5) \approx 6,37 < 6,5$

donc, par définition de la suite u, $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 6,5$

c'est l'inégalité P_{n+1}

Conclusion : L'affirmation est vraie au rang 0, et, pour tout rang naturel non nul, sa véracité est héréditaire, donc, en vertu du principe de démonstration par récurrence, on peut vérifier l'inégalité P_n pour tout entier naturel n.

2. Pour tout entier n , $u_n \leqslant u_{n+1}$ donc la suite u est croissante,

de plus pour tout entier n, $u_n \leqslant 6,5$ donc la suite u est majorée,

or tout suite croissante et majorée est convergente, donc la suite (u_n) converge vers une limite ℓ telle que $\ell \leqslant 6,5$.

3. La suite u est une suite convergente vers une limite ℓ de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f fonction continue. D'après le théorème du point fixe, la limite ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$ ou $h(x) = 0$

On sait de plus que cette limite appartient à l'intervalle $[2\ ;\ 6,5]$ et que sur cette intervalle l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α on a donc $\ell = \alpha$.

On rappelle que le réel α, défini dans la partie **A**, est la solution de l'équation $h(x) = 0$ sur l'intervalle $[2\ ;\ 6,5]$.

EXERCICE 4 — 4 points

Partie A :

On considère l'équation différentielle $(E_1) : y' + 0,48y = \frac{1}{250}$ où y est une fonction de la variable t définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

1. La fonction h est dérivable sur $[0;+\infty[$ et pour tout réel positif t, $h'(t) = 0$. On a dont $h'(t) + 0,48h(t) = 0 + 0,48 \times \frac{1}{120} = \frac{1}{250}$

   Donc la fonction h est solution de l'équation différentielle (E_1).

2. Les solutions de l'équation différentielle $y' + 0,48y = 0$ sont les fonctions de la forme $f(t) = C\mathrm{e}^{-0,48t}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

3. Les solutions de l'équation différentielle (E_1) sont donc les fonctions de la forme $f(t) = C\mathrm{e}^{-0,48t} + \frac{1}{120}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Partie B :

1. Supposons que p est solution de l'équation différentielle (E_2),

   On a donc $p' = \frac{1}{250}p \times (120 - p)$

   Or $p = \frac{1}{y}$ et $p' = \frac{-y'}{y^2}$

   $$\frac{-y'}{y^2} = \frac{1}{250}\frac{1}{y} \times \left(120 - \frac{1}{y}\right) \Longrightarrow -y' = y^2 \times \frac{1}{250y} \times \frac{120y - 1}{y}$$

   D'où
   $$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow -y' = \frac{1}{250} \times (120y - 1) \\ &\Longleftrightarrow -y' = 0,48y - \frac{1}{250} \\ &\Longleftrightarrow y' + 0,48y = \frac{1}{250} \end{aligned}.$$

   Donc y est solution de l'équation différentielle $(E_1) : y' + 0,48y = \frac{1}{250}$.

2. y est de la forme $y(t) = C\mathrm{e}^{-0,48t} + \frac{1}{120}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

   on a donc
   $$\begin{aligned} p(t) &= \frac{1}{y(t)} \\ &= \frac{1}{C\mathrm{e}^{-0,48t} + \frac{1}{120}} \text{ avec } C \in \mathbb{R} \\ &= \frac{120}{120C\mathrm{e}^{-0,48t} + 1} \text{ avec } C \in \mathbb{R} \\ &= \frac{120}{K\mathrm{e}^{-0,48t} + 1} \text{ avec } K \in \mathbb{R} \text{ en posant } K = 120C \end{aligned}$$

3. On sait que $p(0) = 30$ donc $\frac{120}{K\mathrm{e}^0 + 1} = 30$,

   donc $\frac{120}{30} = K + 1$ d'où $K = \frac{120}{30} - 1 = 3$.

4. On sait que : $\begin{cases} \lim\limits_{t \to +\infty} -0,48t = -\infty \\ \lim\limits_{X \to -\infty} \mathrm{e}^X = 0 \end{cases}$ donc, par composition, $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-0,48t} = 0$.

   Donc, par produit et somme, $\lim\limits_{t \to +\infty} 1 + 3\mathrm{e}^{-0,48t} = 1$

   et finalement par quotient, $\lim\limits_{t \to +\infty} p(t) = 120$.

   Dans le contexte de l'exercice la population de la bactérie se stabilisera vers 120 000.

5. $p(t) = 60 \iff \dfrac{120}{3\mathrm{e}^{-0,48t}+1} = 60$

$$\begin{aligned}
&\iff 120 = 60 \times \left(3\mathrm{e}^{-0,48t}+1\right)\\
&\iff 2 = 3\mathrm{e}^{-0,48t}+1\\
&\iff \frac{1}{3} = \mathrm{e}^{-0,48t}\\
&\iff -0,48t = \ln\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln(3)\\
&\iff t = \frac{\ln(3)}{0,48} \approx 2,289
\end{aligned}$$

Le temps nécessaire pour que la population de bactéries dépasse 60 000 individus est de 2,289 heures soit 2 heures et 17 minutes.

Sujet : Métropole 17 juin 2025

EXERCICE 1 **5 points**

On compte quatre groupes sanguins dans l'espèce humaine : A, B, AB et O.

Chaque groupe sanguin peut présenter un facteur rhésus. Lorsqu'il est présent, on dit que le rhésus est positif, sinon on dit qu'il est négatif.

Au sein de la population française, on sait que :

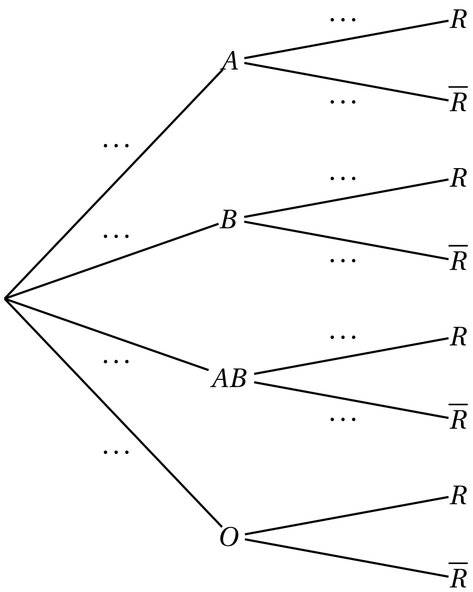
- 45 % des individus appartiennent au groupe A, et parmi eux 85 % sont de rhésus positif;
- 10 % des individus appartiennent au groupe B, et parmi eux 84 % sont de rhésus positif;
- 3 % des individus appartiennent au groupe AB, et parmi eux 82 % sont de rhésus positif.

On choisit au hasard une personne dans la population française.

On désigne par :

- A l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin A »;
- B l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin B »;
- AB l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin AB »;
- O l'évènement « La personne choisie est de groupe sanguin O »;
- R l'évènement « La personne choisie a un facteur rhésus positif ».

Pour un évènement quelconque E, on note $\overline{E}$ l'évènement contraire de E et $p(E)$ la probabilité de E.



1. Recopier l'arbre ci-contre en complétant les dix pointillés.
2. Montrer que $p(B \cap R) = 0,084$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
3. On précise que $p(R) = 0,8397$.
   Montrer que $p_O(R) = 0,83$.
4. On dit qu'un individu est « donneur universel »lorsque son sang peut être transfusé à toute personne sans risque d'incompatibilité.
   Le groupe O de rhésus négatif est le seul vérifiant cette caractéristique.
   Montrer que la probabilité qu'un individu choisi au hasard dans la population française soit donneur universel est de 0,071 4.

6. Lors d'une collecte de sang, on choisit un échantillon de 100 personnes dans la population d'une ville française. Cette population est suffisamment grande pour assimiler ce choix à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 100 personnes associe le nombre de donneurs universels dans cet échantillon.

   a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

   b. Déterminer à 10^{-3} près la probabilité qu'il y ait au plus 7 donneurs universels dans cet échantillon.

   c. Montrer que l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X est égale à $7,14$ et que sa variance $V(X)$ est égale à $6,63$ à 10^{-2} près.

7. Lors de la semaine nationale du don du sang, une collecte de sang est organisée dans N villes françaises choisies au hasard numérotées 1,2, 3, ... , N où N est un entier naturel non nul.

On considère la variable aléatoire X_1 qui à chaque échantillon de 100 personnes de la ville 1 associe le nombre de donneurs universels dans cet échantillon.

On définit de la même manière les variables aléatoires X_2 pour la ville 2, ... , X_N pour la ville N.

On suppose que ces variables aléatoires sont indépendantes et qu'elles admettent la même espérance égale à $7,14$ et la même variance égale à $6,63$.

On considère la variable aléatoire $M_N = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N}$.

a. Que représente la variable aléatoire M_N dans le contexte de l'exercice ?

b. Calculer l'espérance $E(M_N)$.

c. On désigne par $V(M_N)$ la variance de la variable aléatoire M_N.

Montrer que $V(M_N) = \dfrac{6,63}{N}$.

d. Déterminer la plus petite valeur de N pour laquelle l'inégalité de Bienaymé- Tchebychev permet d'affirmer que :

$$P(7 < M_N < 7,28) \geqslant 0,95.$$

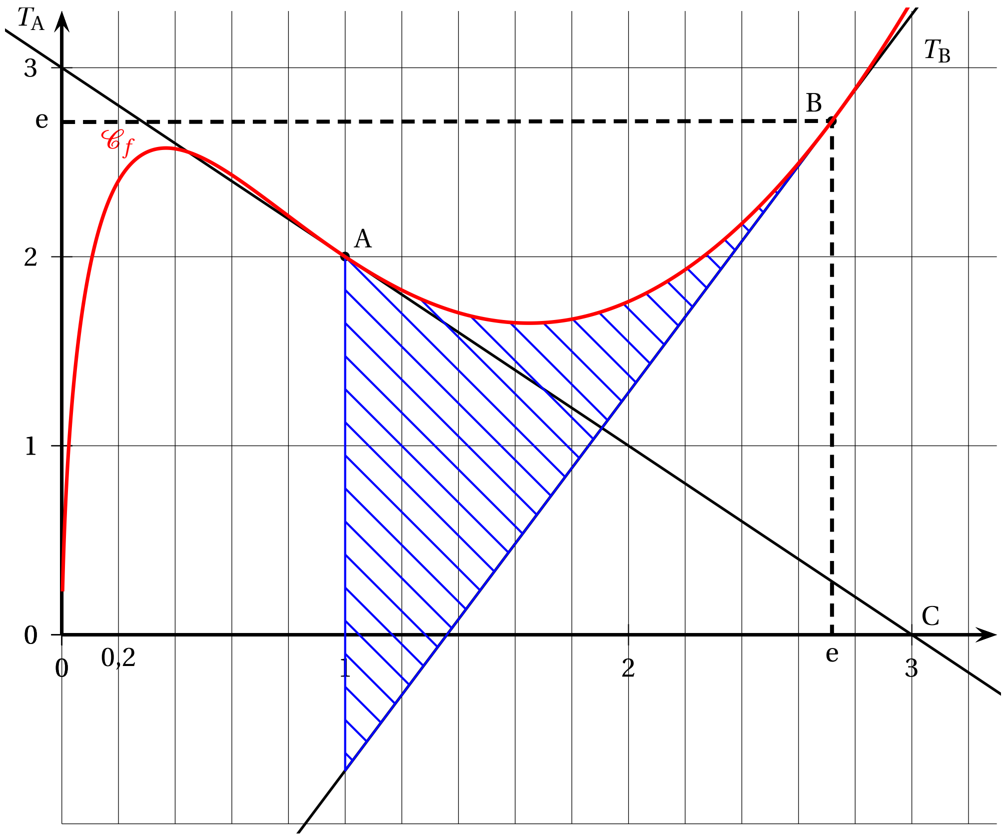
Exercice 2 **6 points**

On considère une fonction f définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$. On admet qu'elle est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

Dans un repère orthogonal, on a tracé ci-dessous :

- la courbe représentative de f, notée $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $]0\,;\,3]$;
- la droite T_A,tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A(1 ; 2) ;
- la droite T_B tangente à $\mathscr{C}_f$ au point B(e ; e).

On précise par ailleurs que la tangente T_A passe par le point C(3 ; 0).



Partie A : Lectures graphiques

On répondra aux questions suivantes en les justifiant à l'aide du graphique.

1. Déterminer le nombre dérivé $f'(1)$.
2. Combien de solutions l'équation $f'(x) = 0$ admet-elle dans l'intervalle $]0;3]$?
3. Quel est le signe de $f''(0,2)$?

Partie B : étude de la fonction f

On admet dans cette partie que la fonction f est définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x[2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2]$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2X^2 - 3X + 2 = 0$.

   En déduire que $\mathscr{C}_f$ ne coupe pas l'axe des abscisses.
2. Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$.

   On admettra que la limite de f en 0 est égale à 0.
3. On admet que pour tout x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$, $\quad f'(x) = 2(\ln x)^2 + \ln x - 1$.

   a. Montrer que pour tout x appartenant à $]0\ ;\ +\infty[$, $f''(x) = \dfrac{1}{x}(4\ln x + 1)$.

   b. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ et préciser la valeur exacte de l'abscisse du point d'inflexion.

   c. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de la tangente T_{B} sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$.

Partie C : Calcul d'aire

1. Justifier que la tangente T_{B} a pour équation réduite $y = 2x - \mathrm{e}$.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2+1}{4}.$$

3. On note $\mathscr{A}$ l'aire du domaine hachuré sur la figure, délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, la tangente T_{B}, et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.

   On admet que $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} x(\ln x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2-1}{4}$.

   En déduire la valeur exacte de $\mathscr{A}$ en unité d'aire.

EXERCICE 3 **4 points**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

On munit l'espace d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

1. On considère les points $\mathrm{A}(-1\ ;\ 0\ ;\ 5)$ et $\mathrm{B}(3\ ;\ 2\ ;\ -1)$.

   Affirmation 1 : Une représentation paramétrique de la droite (AB) est

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3-2t \\ y &=& 2-\ t \\ z &=& -1+3t \end{array}\right. \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

   Affirmation 2 : Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\-2\\1\end{pmatrix}$ est normal au plan (OAB).

2. On considère :

- la droite d de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 15+k \\ y = 8-k \\ z = -6+2k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$;

- la droite d' de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1+4s \\ y = 2+4s \\ z = 1-6s \end{cases}$ avec $s \in \mathbb{R}$.

Affirmation 3 : Les droites d et d' ne sont pas coplanaires.

3. On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x-y+z+1=0$.

Affirmation 4 : La distance du point C(2 ; −1 ; 2) au plan $\mathscr{P}$ est égale à $2\sqrt{3}$.

EXERCICE 4 **5 points**

Une équipe de biologistes étudie l'évolution de la superficie recouverte par une algue marine appelée posidonie, sur le fond de la baie de l'Alycastre, près de l'île de Porquerolles.

La zone étudiée est d'une superficie totale de 20 hectares (ha), et au premier juillet 2024, la posidonie recouvrait 1 ha de cette zone.

Partie A : étude d'un modèle discret

Pour tout entier naturel n, on note u_n la superficie de la zone, en hectare, recouverte par la posidonie au premier juillet de l'année $2024+n$. Ainsi, $u_0 = 1$.

Une étude conduite sur cette superficie a permis d'établir que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = -0,02u_n^2 + 1,3u_n.$$

1. Calculer la superficie que devrait recouvrir la posidonie au premier juillet 2025 d'après ce modèle.

2. On note h la fonction définie sur $[0;20]$ par

$$h(x) = -0,02x^2 + 1,3x.$$

On admet que h est croissante sur $[0;20]$.

a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 20$.

b. En déduire que la suite (u_n) converge. On note L sa limite.

c. Justifier que $L = 15$.

3. Les biologistes souhaitent savoir au bout de combien de temps la surface recouverte par la posidonie dépassera les 14 hectares.

a. Sans aucun calcul, justifier que, d'après ce modèle, cela se produira.

b. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'en fin d'exécution, il affiche la réponse à la question des biologistes.

```
def seuil():
  n=0
  u= 1
  while ...... :
    n=......
    u=......
  return n
```

Partie B : étude d'un modèle continu

On souhaite décrire la superficie de la zone étudiée recouverte par la posidonie au cours du temps avec un modèle continu.

Dans ce modèle, pour une durée t, en année, écoulée à partir du premier juillet 2024, la superficie de la zone étudiée recouverte par la posidonie est donnée par $f(t)$, où f est une fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ vérifiant :

- $f(0) = 1$;
- f ne s'annule pas sur $[0\ ;\ +\infty[$;
- f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$;

- f est solution sur $[0\,;\,+\infty[$ de l'équation différentielle

$$(E_1): \quad y' = 0,02y(15 - y).$$

On admet qu'une telle fonction f existe ; le but de cette partie est d'en déterminer une expression.

On note f' la fonction dérivée de f.

1. Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(t) = \dfrac{1}{f(t)}$.

   Montrer que g est solution de l'équation différentielle

$$(E_2): \quad y' = -0,3y + 0,02.$$

2. Donner les solutions de l'équation différentielle (E_2).
3. En déduire que pour tout $t \in [0\,;\,+\infty[$:

$$f(t) = \frac{15}{14\mathrm{e}^{-0,3t} + 1}.$$

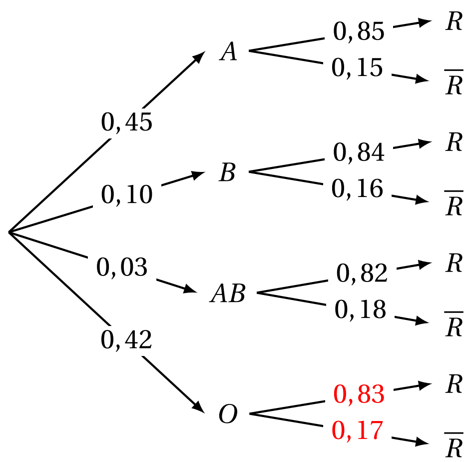
4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
5. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ l'inéquation $f(t) > 14$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Corrigés : Métropole 17 juin 2025

Exercice 1 — 5 points

Puisque l'on choisit une personne au hasard dans la population française, on est en situation d'équiprobabilité, et donc la loi uniforme permet d'assimiler les proportions à des probabilités.

1. L'arbre représentant la situation est :



   Remarque : les deux probabilités en rouge n'étaient pas attendues ici. On peut compléter ces deux branches après avoir répondu à la question **3.**

2. $P(B \cap R) = P(B) \times P_B(R) = 0,10 \times 0,84 = 0,084$.

   Dans le contexte de l'exercice, 8,4% de la population est de groupe sanguin B et de rhésus positif.

3. Les évènements A, B, AB et O forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales :

   $P(R) = P\big(A \cap R\big) + P\big(B \cap R\big) + P\big(AB \cap R\big) + P\big(O \cap R\big)$

D'où : $P\big(O\cap R\big) = P(R) - P\big(A\cap R\big) - P\big(B\cap R\big) - P\big(AB\cap R\big)$

$= 0{,}8397 - 0,45\times 0,85 - 0,084 - 0,03\times 0,82$

$= 0{,}3486$

Or $P_O(R) = \dfrac{P(O\cap R)}{P(O)} = \dfrac{0{,}3486}{0,42} = 0,83$

Ce qui est le résultat donné.

4. Trouver la probabilité qu'un individu choisi au hasard dans la population française soit donneur universel revient à calculer la probabilité $P\left(O\cap \overline{R}\right)$.

$$\begin{aligned}P\left(O\cap \overline{R}\right) &= P(O)\times P_O\left(\overline{R}\right)\\ &= P(O)\times (1-P_O(R))\\ &= 0,42\times(1-0,83)\\ &= 0,0714\end{aligned}$$

La probabilité d'être un donneur universel est bien de 0,0714.

5. **a.** On répète 100 fois de manière identique et indépendante une expérience aléatoire à deux issues dont le succès « la personne est un donneur universel » a une probabilité $p = 0,0714$.

La variable aléatoire X compte le nombre de succès.

Donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}0714$.

b. $P(X \leq 7) \approx 0{,}57714$.

À 10^{-3} près, la probabilité qu'il y ait au plus 7 donneurs universels dans cet échantillon vaut 0,577.

c. X suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}0714$ donc :

$$\begin{aligned}E(X) &= n\times p\\ &= 100\times 0,0714\\ &= 7,14\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V(X) &= n\times p\times(1-p)\\ &= 100\times 0,0714\times(1-0,714)\\ &= 6{,}630204\\ &\approx 6,63 \quad \text{à } 10^{-2} \text{ près.}\end{aligned}$$

6. **a.** La variable aléatoire M_N dans le contexte de l'exercice représente le nombre moyen de donneurs universels sur les N collectes de sang organisées.

b. M_N est la moyenne empirique de la variable aléatoire X donc :

$E\left(M_N\right) = E(X) = 7,14$.

c. $V\left(M_N\right) = \dfrac{V(X)}{N} = \dfrac{6,63}{N}$.

d. L'évènement $\{7 < M_N < 7{,}28\}$ revient à $\{|M_N - 7,14| < 0,14\}$

et $P\Big(|M_N - 7,14| < 0,14\Big) = 1 - P\Big(|M_N - 7,14| \geqslant 0,14\Big)$.

On veut que $1 - P\Big(|M_N - 7,14| \geqslant 0,14\Big) \geqslant 0,95$

On veut donc que $P\Big(|M_N - 7,14| \geqslant 0,14\Big) \leqslant 0,05$

Or, pour tout réel $t > 0$, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$P\Big(|M_N - E\big(M_N\big)| \geqslant t\Big) \leqslant \dfrac{V\big(M_N\big)}{t^2}$

Pour $t = 0,14$ on obtient : $P\Big(|M_N - 7,14| \geqslant 0,14\Big) \leqslant \dfrac{6,63}{N\times 0,14^2}$.

On veut donc que : $\dfrac{16575}{49N} \leqslant 0,05 \iff \dfrac{331500}{49} \leqslant N$

$\iff 6765 + \dfrac{15}{49} \leqslant N$

L'inégalité est donc vraie pour tout entier $N \geqslant 6766$.

La plus petite valeur de N pour laquelle l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet d'affirmer que $P(7 < M_N < 7,28$ 0,95 est 6766.

Exercice 2 — 6 points

Partie A : Lectures graphiques

1. Le nombre dérivé $f'(1)$ est égal au coefficient directeur de la tangente à C_f au point A(1 ; 2).

   La tangente T_A passe par le point C(3 ; 0) son coefficient directeur est donc égal à $\dfrac{0-2}{3-1} = \dfrac{-2}{2} = -1$.

   Donc $f'(1) = -1$.

2. $f'(x) = 0$ lorsque la tangente à la courbe est horizontale.

   L'équation $f'(x) = 0$ admet donc 2 solutions dans l'intervalle $]0 ; 3]$ ce qui correspond à deux extremums de la fonction.

3. Graphiquement, sur l'intervalle $[0 ; 0,5]$ le graphe de la fonction semble concave donc on en déduit : $f''(0,2) < 0$.

Partie B : Étude de la fonction *f*

1. $2X^2 - 3X + 2 = 0$ est une équation du second degré. Déterminons son discriminant Δ :

   $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 9 - 16 = -7 < 0$

   Le discriminant est négatif donc cette équation n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}$.

   C_f coupe l'axe des abscisses à l'abscisse x est équivalent à $f(x) = 0$ soit

   $x\left(2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2\right) = 0$.

   Or $x > 0$ donc $f(x) = 0 \iff 2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 0$

   Posons pour $x > 0$, $X = \ln(x)$, l'équation devient : $2X^2 - 3X + 2 = 0$ or on vient de démontrer que cette équation n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}$ donc C_f ne coupe pas l'axe des abscisses

2. $f(x) = x\left(2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2\right) = x(\ln x)^2\left(2 - \dfrac{3}{\ln x} + \dfrac{2}{(\ln x)^2}\right)$.

   On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x)^2 = +\infty$

   d'où, d'une part : $\lim\limits_{x \to +\infty} x(\ln x)^2 = +\infty$

   et, d'autre part $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{\ln x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{(\ln x)^2} = 0 \end{cases}$ donc, par somme $\lim\limits_{x \to +\infty} 2 - \dfrac{3}{\ln(x)} + \dfrac{2}{(\ln(x))^2} = 2$.

   Et finalement, par produit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

3. **a.** $f'(x) = 2(\ln x)^2 + \ln x - 1$.

   Non demandé : f est dérivable comme produit de sommes de fonctions de x dérivables sur $]0 ; +\infty[$ et sur cet intervalle :

   $f'(x) = 2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 + x(4\ln x \times \dfrac{1}{x} - 3\dfrac{1}{x}) = 2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 + 4\ln x - 3 = 2(\ln x)^2 + \ln x - 1$.

   On sait que u étant une fonction de x dérivable $(u^n)' = nu'u^{n-1}$

   Donc pour tout x appartenant à $]0 ; +\infty[$:

   $f''(x) = 2 \times 2\ln x \times \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x} - 0 = \dfrac{1}{x}(4\ln x + 1)$.

b. Pour déterminer la convexité de f, déterminons le signe de $f''(x)$.

Sur $]0\,;\,+\infty[$, $\dfrac{1}{x} > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $4\ln x + 1$

$$\begin{aligned} 4\ln x + 1 = 0 &\iff \ln x = -\frac{1}{4} \\ &\iff x = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4\ln x + 1 > 0 &\iff \ln x > -\frac{1}{4} \\ &\iff x > \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

Donc $f''(x) \geqslant 0 \iff x \in \left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}\,;\,+\infty\right[$: la fonction f est convexe sur cet intervalle.

D'où :

x	0		$\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}$		$+\infty$
signe de $f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	

La fonction f est concave sur l'intervalle $\left]0\,;\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}\right]$ et convexe sur l'intervalle $\left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}\,;\,+\infty\right[$.

La valeur exacte de l'abscisse du point d'inflexion est $\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}} \approx 0,779$.

c. La fonction f est convexe sur l'intervalle $\left[\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}\,;\,+\infty\right[$ or $\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}} < 1$

donc la fonction f est convexe sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$

et donc sur cet intervalle, la courbe C_f est au-dessus de toutes ses tangentes, en particulier T_{B}.

Partie C : Calcul d'aire

1. L'équation réduite de la tangente T_{B} au point d'abscisse e est : $y = f'(\mathrm{e})(x-\mathrm{e}) + f(\mathrm{e})$

$f'(\mathrm{e}) = 2(\ln \mathrm{e})^2 + \ln \mathrm{e} - 1 = 2\times 1 + 1 - 1 = 2$;

$f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}\left(2(\ln \mathrm{e})^2 - 3\ln e + 2\right) = \mathrm{e}\left(2\times 1^2 - 3 + 2\right) = \mathrm{e}\times 1 = \mathrm{e}$. (Ceci est dans l'énoncé mais pas clairement!)

La tangente T_{B} a donc pour équation réduite $y = 2x - \mathrm{e}$.

2. $x \longmapsto x\ln x$ est de la forme uv' avec $\begin{cases} u(x) = \ln x & \text{et} \quad u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = x & \text{et} \quad v(x) = \frac{x^2}{2} \end{cases}$

Les fonctions u et v sont continues car dérivables sur $[1\,;\,\mathrm{e}]$ et les fonctions u' et v' sont continues sur $[1\,;\,\mathrm{e}]$, donc, d'après la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\,\mathrm{d}x &= \left[\ln x \times \frac{x^2}{2}\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \left[\frac{1}{x}\times\frac{x^2}{2}\right]\mathrm{d}x \\ &= \left(\ln \mathrm{e}\times\frac{\mathrm{e}^2}{2}\right) - \left(\ln 1\times\frac{1^2}{2}\right) - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x \\ &= 1\times\frac{\mathrm{e}^2}{2} - 0 - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^{\mathrm{e}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \left(\frac{\mathrm{e}^2}{4} - \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{2\mathrm{e}^2}{4} - \frac{\mathrm{e}^2}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{\mathrm{e}^2+1}{4} \end{aligned}$$

3. On note $\mathscr{A}$ l'aire du domaine hachuré sur la figure, délimité par la courbe C_f, la tangente T_{B}, et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$.

Sur l'intervalle $[1 ; \mathrm{e}]$, la courbe C_f est au-dessus de la tangente T_{B} donc l'aire du domaine hachuré sur la figure, délimité par la courbe C_f, la tangente T_{B}, et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \mathrm{e}$ est égale, en unité d'aires, à $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} [f(x) - 2x + \mathrm{e}]\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \int_1^{\mathrm{e}} [f(x) - 2x + \mathrm{e}]\,\mathrm{d}x\\
&= \int_1^{\mathrm{e}} [2x(\ln x)^2 - 3x\ln x + 2x - 2x + \mathrm{e}]\,\mathrm{d}x\\
&= 2\int_1^{\mathrm{e}} x(\ln x)^2\,\mathrm{d}x - 3\int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\,\mathrm{d}x + \int_1^{\mathrm{e}} \mathrm{e}\,\mathrm{d}x \quad \text{par linéarité de l'intégrale}\\
&= 2\times\frac{\mathrm{e}^2-1}{4} - 3\times\frac{\mathrm{e}^2+1}{4} + \Big[\mathrm{e}x\Big]_1^{\mathrm{e}} \qquad .\\
&= \frac{2\mathrm{e}^2 - 2 - 3\mathrm{e}^2 - 3}{4} + \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}\\
&= \frac{-\mathrm{e}^2-5}{4} + \frac{4\mathrm{e}^2-4\mathrm{e}}{4}\\
&= \frac{3\mathrm{e}^2-5-4\mathrm{e}}{4}.
\end{aligned}$$

Soit une aire d'environ 1,57 unités d'aire.

La valeur exacte de $\mathscr{A}$ est $\dfrac{3\mathrm{e}^2-4\mathrm{e}-5}{4}$ u.a.

Exercice 3 4 points

1. **Affirmation 1 : Vraie.**

   La lecture de la représentation paramétrique donnée indique que la droite représentée :

   - passe (pour le paramètre $t = 0$) par le point de coordonnées $(3 ; 2 ; -1)$, autrement dit par B ;
   - et qu'elle est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix}$.

     Comme on a : $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}3-(-1)\\2-0\\-1-5\end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}4\\2\\-6\end{pmatrix}$, on remarque que $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = -2\overrightarrow{u}$, donc la droite dont on a la représentation paramétrique est dirigée par un vecteur colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

   Ainsi, la représentation paramétrique donnée est celle d'une droite passant par B et dirigée par $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$: c'est bien la droite (AB).

   Affirmation 2 : Fausse.

   Comme O est l'origine du repère, on a $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\begin{pmatrix}-1\\0\\5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$.

   Ces vecteurs sont clairement non colinéaires, et donc O, A et B définissent bien un plan. Le repère est orthonormal, donc on peut calculer des produits scalaires à l'aide des coordonnées :

   On a bien : $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 5\times(-1) + (-2)\times 0 + 1\times 5 = -5+0+5 = 0$ et $\overrightarrow{n}$ est donc bien orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$,

   par contre, on a : $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 5\times 3 + (-2)\times 2 + 1\times(-1) = 15-4-1 = 10 \neq 0$ et $\overrightarrow{n}$ n'est donc pas orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$.

   Ainsi, $\overrightarrow{n}$ n'est pas orthogonal au plan (OAB), car il n'est pas orthogonal à deux vecteurs définissant une base de ce plan.

2. **Affirmation 3 : Fausse.**

Par lecture des représentations paramétriques, les deux droites d et d' sont dirigées respectivement par $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v'}\begin{pmatrix}4\\4\\-6\end{pmatrix}$.

Ces vecteurs sont clairement non colinéaires, donc les droites ne sont pas parallèles (ni confondues, ni strictement parallèles). Elles peuvent donc être soit sécantes, soit non coplanaires.

Cherchons s'il existe un coupe $(k\,;\ s)$ tel que le point de paramètre k sur d soit confondu avec le point de paramètre s sur d', pour cela, résolvons :

$$\begin{aligned}
\begin{cases}15+k=1+4s\\8-k=2+4s\\-6+2k=1-6s\end{cases} &\iff \begin{cases}k=-14+4s\\8-(-14+4s)=2+4s\\-6+2(-14+4s)=1-6s\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}k=-14+4s\\8+14-4s=2+4s\\-6-28+8s=1-6s\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}k=-14+4s\\8s=20\\14s=35\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}k=-14+4s\\s=\frac{20}{8}=\frac{5}{2}\\s=\frac{35}{14}=\frac{5}{2}\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}s=2,5\\s=2,5\\k=-4\end{cases}
\end{aligned}$$

Le système a une solution, donc les deux droites ont un point commun, le point qui a comme coordonnées $(11\,;\ 12\,;\ -14)$, c'est le point de paramètre $k=-4$ sur d et c'est aussi le point de paramètre $s=2,5$ sur d'.

Elles sont donc sécantes en ce point, et donc sont coplanaires.

3. **Affirmation 4 : Vraie.**

Le repère est orthonormé, donc par lecture de l'équation de plan, P admet comme vecteur normal $\overrightarrow{n'}$ de coordonnées : $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

Ainsi, la droite Δ, passant par C et orthogonale à P aura pour représentation paramétrique : $\begin{cases}x=2+l\\y=-1-l\\z=2+l\end{cases}$ avec $l\in\mathbb{R}$.

Si on appelle H le projeté orthogonal de C sur P, alors $\mathrm{H}=P\cap\Delta$. Donc H sera le point de Δ dont le paramètre fait que les coordonnées paramétriques vérifient l'équation de P.

On résout donc : $$\begin{aligned}(2+l)-(-1-l)+(2+l)+1=0 &\iff 3l+6=0\\ &\iff 3l=-6\\ &\iff l=-2\end{aligned}$$

H est donc le point de paramètre $l=-2$ sur Δ, donc ses coordonnées sont :

$\mathrm{H}(0\,;\ 1\,;\ 0)$.

La distance CH vaut donc : $\quad \begin{aligned}[t] \text{CH} &= \sqrt{(0-2)^2+(1-(-1))^2+(0-2)^2}\\ &= \sqrt{4+4+4}\\ &= \sqrt{4\times 3}\\ &= \sqrt{4}\times\sqrt{3}\\ &= 2\sqrt{3}\end{aligned}$

La distance entre C et P, c'est-à-dire la distance de C à son projeté orthogonal sur P est donc bien égale à $2\sqrt{3}$.

Exercice 4 points

Partie A : étude d'un modèle discret

1. Le premier juillet 2025 étant le premier juillet $2024+1$, on demande ici de calculer : $u_1 = u_{0+1} = -0,02u_0^2+1,3u_0 = -0,02\times 1^2+1,3\times 1 = 1,3-0,02 = 1,28$.

D'après ce modèle, au premier juillet 2025, la posidonie recouvrera une superficie de 1,28 ha.

2. On remarque que la fonction h introduite dans la question est la fonction de récurrence de la suite, c'est-à-dire que pour tout entier naturel n, on a : $h(u_n) = u_{n+1}$.

Pour tout entier naturel n, on pose l'affirmation P_n : « $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 20$. »

Initialisation : pour $n=0$, on a, d'après la définition de la suite $u_0 = 1$ et d'après la question précédente $u_1 = 1,28$.

On constate donc que l'affirmation P_0 est vraie.

Hérédité : On suppose que, pour un entier naturel n, l'affirmation P_n est vraie.

Par hypothèse, on a donc :

$$\begin{aligned} 1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 20 &\implies h(1) \leqslant h(u_n) \leqslant h(u_{n+1}) \leqslant h(20)\\ &\qquad \text{car } h \text{ est supposée croissante sur } [0\ ;\ 20]\\ &\implies 1,28 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 18 \quad \text{car } h(1) = 1,28 \text{ et } h(20) = 18.\\ &\implies 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 20 \quad \text{car } 1 \leqslant 1,28 \text{ et } 18 \leqslant 20.\end{aligned}$$

Si P_n est vraie, alors P_{n+1} est donc vraie aussi.

Conclusion : On a établi que la propriété était vraie au rang 0, et que, pour n naturel n, P_n est vraie alors P_{n+1} l'est aussi, donc d'après le principe de récurrence, on en déduit : $\forall n \in \mathbb{N},\quad 1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 20$.

3. D'après la question précédente, on a :

- $\forall n \in \mathbb{N},\quad 1 \leqslant u_n \leqslant 20$: la suite est bornée par 1 et 20 ;
- $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n \leqslant u_{n+1}$: la suite est croissante ;

La suite est donc croissante et majorée, elle est donc convergente, vers une limite L.

Comme la suite est bornée par 1 et 20, on en déduit que la limite L est donc un réel de l'intervalle $[1\ ;\ 20]$.

4. La suite u est définie par récurrence, sa fonction de récurrence étant continue (la fonction h est un polynôme de degré 2, donc continue sur son ensemble de définition) ; la suite est également convergente. D'après le théorème du point fixe, on en déduit que la limite de la suite (u_n) doit être une solution à l'équation $h(x) = x$.

Résolvons cette équation : $\quad \begin{aligned}[t] h(x) = x &\iff -0,02x^2+1,3x = x\\ &\iff -0,02x^2+0,3x = 0\\ &\iff -0,02x\left(x+\frac{0,3}{-0,02}\right) = 0\\ &\iff -0,02x(x-15) = 0\\ &\iff x = 0 \text{ ou bien } x = 15\end{aligned}$

L'équation a deux solutions, 0 et 15, et parmi ces deux solutions, seule 15 est dans l'intervalle $[1\ ;\ 20]$, dont on a établi qu'il contient la limite L.

La limite de la suite est donc bien $L = 15$.

5. **a.** Puisque la suite converge vers 15, tout intervalle ouvert contenant 15 doit contenir tous les termes de la suite, à partir d'un certain rang.

L'intervalle $]14\,;\,+\infty[$ est un tel intervalle, donc il existe un rang N_0 à partir duquel les termes de la suite sont dans l'intervalle $]14\,;\,+\infty[$, et sont donc supérieurs à 14.

Il existe donc une année à partir de laquelle la posidonie recouvrira une surface dépassant les 14 ha.

b. Il s'agit ici d'un algorithme de seuil classique, `n` et `u` sont initialisées à 0 et u_0 respectivement. Tant que le terme stocké dans la variable `u` restera inférieur ou égal à 14, alors on mettra à jour ces deux variables pour qu'elles contiennent respectivement l'indice suivant et le terme suivant dans la suite.

Cela donne :

```
def seuil():
n=0
u=1
while u < = 14 :
n= n+1
u= -0.02*u**2 + 1.3*u
return n
```

Remarque : Il y a une légère ambigüité sur l'interprétation de l'expression « dépassera les 14 hectares ». On a choisi dans ce corrigé de le comprendre comme « devenant strictement supérieur à 14 hectares ».

Si on interprète comme « devenant supérieur ou égal à 14 hectares », alors la quatrième ligne de l'algorithme devient : `while u < 14 :` Les deux versions renvoient le même résultat, de toutes façons, car aucun terme de la suite n'est égal à 14.

L'appel `seuil()` renvoie ici 18, car $u_{17} \approx 13,8$ et $u_{18} \approx 14,1$. Il faudra donc 18 ans pour que la posidonie recouvre une surface dépassant les 14 hectares.

Partie B : étude d'un modèle continu

1. Si on a, pour tout réel positif t, $\quad g = \dfrac{1}{f(t)}$, alors pour tout réel t positif, on a :

$$g'(t) = \frac{-f'(t)}{f(t)^2}$$

On aura alors :
$$\begin{aligned} -0,3g(t) + 0,02 &= \frac{-0,3}{f(t)} + 0,02 \\ &= \frac{-0,3 + 0,02f(t)}{f(t)} \end{aligned}$$

Et, par ailleurs :
$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{-f'(t)}{f(t)^2} \\ &= \frac{-\left[0,02f(t)(15 - f(t))\right]}{f(t)^2} \quad \text{car } f \text{ est solution de } (E_1) \\ &= \frac{-\left[0,02(15 - f(t))\right]}{f(t)} \quad \text{en simplifiant par } f(t) \\ &\qquad \text{on rappelle que } f \text{ ne s'annule pas sur } [0\,;\,+\infty[\\ &= \frac{-0,3 + 0,02f(t)}{f(t)} \quad \text{en développant} \\ &= -0,3g(t) + 0,02 \end{aligned}$$

On constate bien que g est une solution de l'équation différentielle (E_2).

2. Les solutions de l'équation (E_2) sont, d'après une propriété du cours, les fonctions de la forme : $\quad t \longmapsto C\mathrm{e}^{-0,3t} + \dfrac{-0,02}{-0,3}$, $\quad$ où $C \in \mathbb{R}$.

C'est-à-dire, les fonctions de la forme $\quad t \longmapsto C\mathrm{e}^{-0,3t} + \dfrac{1}{15}, \quad$ où $C \in \mathbb{R}$.

3. Comme on sait que $f(0) = 1$, on en déduit $g(0) = \dfrac{1}{f(0)} = 1$.

Donc
$$\begin{aligned} g(0) = 1 &\iff C\mathrm{e}^{-0,3\times 0} + \frac{1}{15} = 1 \\ &\iff C + \frac{1}{15} = 1 \\ &\iff C = 1 - \frac{1}{15} \\ &\iff C = \frac{14}{15} \end{aligned}$$

La seule fonction solution de (E_2) vérifiant $g(0) = 1$ est donc

$g : t \longmapsto \dfrac{14}{15}\mathrm{e}^{-0,3t} + \dfrac{1}{15}$.

On en déduit donc que, pour tout t réel positif, on a : $\quad f(t) = \dfrac{1}{g(t)}$
$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\frac{14}{15}\mathrm{e}^{-0,3t} + \frac{1}{15}} \\ &= \frac{15}{14\mathrm{e}^{-0,3t} + 1} \end{aligned}$$

On arrive bien à l'expression annoncée.

4. On a : $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} -0,3t = -\infty$, $\quad$ donc par composition, $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-0,3t} = \lim_{y \to -\infty} \mathrm{e}^{y} = 0$

Par limite du produit et de la somme, on a alors : $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} 14\mathrm{e}^{-0,3t} + 1 = 1$.

Finalement, par limite du quotient : $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{15}{14\mathrm{e}^{-0,3t} + 1} = 15$.

La fonction f tend vers 15 quand t tend vers $+\infty$. Le modèle continu rejoint la conclusion du modèle discret : la posidonie tendra à occuper une surface de 15 hectares.

5. Soit t un réel positif. Résolvons :

$$\begin{aligned} f(t) > 14 &\iff \frac{15}{14\mathrm{e}^{-0,3t} + 1} > 14 \\ &\iff 15 > 14(14\mathrm{e}^{-0,3t} + 1) \quad \text{car } 14\mathrm{e}^{-0,3t} + 1 > 0 \\ &\iff 15 > 196\mathrm{e}^{-0,3t} + 14 \\ &\iff 1 > 196\mathrm{e}^{-0,3t} \\ &\iff \frac{1}{196} > \mathrm{e}^{-0,3t} \quad \text{car } 196 > 0 \\ &\iff \ln\left(\frac{1}{196}\right) > -0,3t \quad \text{car ln est strictement croissante sur } \mathbb{R}^{+} \\ &\iff -\ln(196) > -0,3t \quad \text{par proriété de la fonction ln} \\ &\iff \frac{\ln(196)}{0,3} < t \quad \text{car } -0,3 < 0 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc l'intervalle $\left]\dfrac{\ln(196)}{0,3}\ ;\ +\infty\right[$.

Comme $\dfrac{\ln(196)}{0,3} \approx 17,6$, cela signifie qu'il faudra environ 17,6 années (soit 17 ans et un peu plus de 7 mois) pour que la posidonie occupe un espace strictement supérieur à 14 hectares. Là encore, le modèle continu a des conclusions cohérentes avec celles du modèle discret.

Sujet : Polynésie 17 juin 2025

Exercice 1 5 points

Dans tout l'exercice, les probabilités seront, si nécessaire, arrondies à 10^{-3} près.

Une donnée binaire est une donnée qui ne peut prendre que deux valeurs : 0 ou 1.

Une donnée de ce type est transmise successivement d'une machine à une autre.

Chaque machine transmet la donnée reçue soit de manière fidèle, c'est-à-dire en transmettant l'information telle qu'elle l'a reçue (1 devient 1 et 0 devient 0), soit de façon contraire (1 devient 0 et 0 et devient 1).

La transmission est fidèle dans 90 % des cas, et donc contraire dans 10 % des cas.

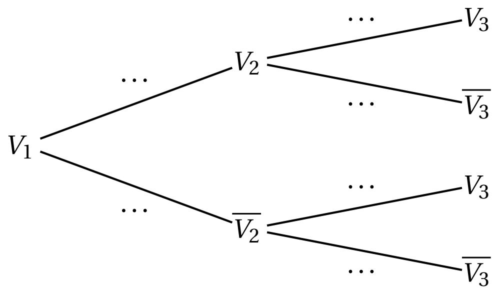
Dans tout l'exercice, la première machine reçoit toujours la valeur 1.

Partie A

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note :

- V_n l'évènement : ń la n-ième machine détient la valeur 1 ż;
- $\overline{V_n}$ l'évènement : ń la n-ième machine détient la valeur 0 ż.

1. **a.** Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous.



b. Démontrer que $P(V_3) = 0,82$ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

c. Sachant que la troisième machine a reçu la valeur 1, calculer la probabilité que la deuxième machine ait aussi reçu la valeur 1.

2. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note $p_n = P(V_n)$.

La première machine a reçu la valeur 1, on a donc $p_1 = 1$.

a. Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$p_{n+1} = 0,8p_n + 0,1.$$

b. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$p_n = 0,5 \times 0,8^{n-1} + 0,5.$$

c. Calculer la limite de p_n lorsque n tend vers l'infini. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Pour modéliser en langage Python la transmission de la donnée binaire décrite en début d'exercice, on considère la fonction `simulation` qui prend en paramètre un entier naturel n qui représente le nombre de transmissions réalisées d'une machine à une autre, et qui renvoie la liste des valeurs successives de la donnée binaire.

On donne ci-dessous le script incomplet de cette fonction.

On rappelle que l'instruction `rand()` renvoie un nombre aléatoire de l'intervalle $[0\,;\,1[$.

```
1   def simulation(n):
2      donnee = 1
3      liste = [donnee]
4      for k in range(n):
5          if rand() <0.1
6             donnee = 1 - donnee
7          liste.append(donnee)
9      return liste
```

Par exemple, `simulation(3)` peut renvoyer $[1,\ 0,\ 0,\ 1]$.Cette liste traduit :

- qu'une donnée binaire a été successivement transmise trois fois entre quatre machines ;
- la première machine qui détient la valeur 1 a transmis de façon contraire cette donnée à la deuxième machine ;
- la deuxième machine a transmis la donnée qu'elle détient de façon fidèle à la troisième ;
- la troisième machine a transmis de façon contraire la donnée qu'elle détient à la quatrième.

1. Déterminer le rôle des instructions des lignes 5 et 6 de l'algorithme ci-dessus.

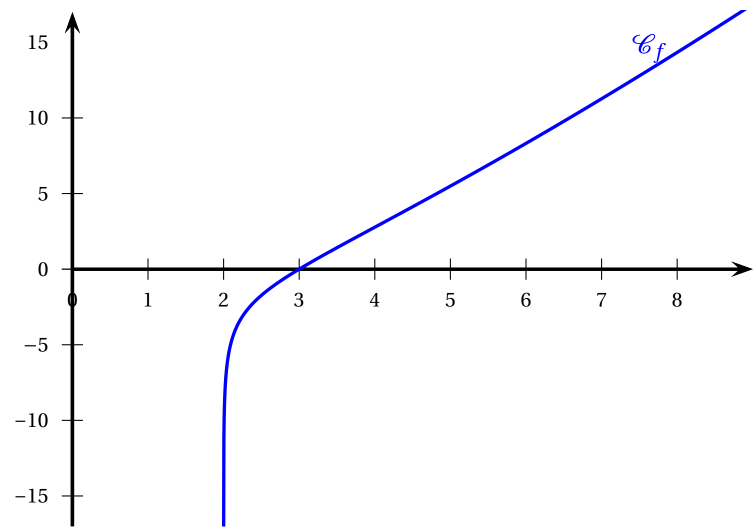
2. Calculer la probabilité que simulation(4) renvoie la liste $[1, 1, 1, 1, 1]$ et la probabilité que `simulation(6)` renvoie la liste $[1,\ 0, 1, 0, 0, 1, 1]$.

Exercice 2 **5 points**

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]2\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x\ln(x-2).$$

Une partie de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f est donnée ci-dessous.



1. Conjecturer, à l'aide du graphique, le sens de variation de f ses limites aux bornes de son ensemble de définition ainsi que les éventuelles asymptotes.

2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $]2\,;\,+\infty[$.

3. Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)$.

Ce résultat confirme-t-il l'une des conjectures faites à la question 1. ?

4. Démontrer que pour tout x appartenant à $]2\,;\,+\infty[$:

$$f'(x) = \ln(x-2) + \frac{x}{x-2}.$$

5. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]2\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = f'(x)$.

   a. Démontrer que pour tout x appartenant à $]2\ ;\ +\infty[$, on a :

$$g'(x) = \frac{x-4}{(x-2)^2}.$$

   b. On admet que $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} g(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

   En déduire le tableau des variations de la fonction g sur $]2\ ;\ +\infty[$. On fera apparaître la valeur exacte de l'extremum de la fonction g.

   c. En déduire que, pour tout x appartenant à $]2\ ;\ +\infty[$, $g(x) > 0$.

   d. En déduire le sens de variation de la fonction f sur $]2\ ;\ +\infty[$.

6. Étudier la convexité de la fonction f sur $]2\ ;\ +\infty[$ et préciser les coordonnées d'un éventuel point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f.

7. Combien de valeurs de x existe-t-il pour lesquelles la courbe représentative de f admet une tangente de coefficient directeur égal à 3 ?

Exercice 3 — 5 points

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

On considère les points suivants :

$$\text{A}(1\,;3\,;0),\quad \text{B}(-1\ ;\ 4\ ;\ 5),\quad \text{C}(0\,;1\,;0)\quad \text{et}\quad \text{D}(-2\ ;\ 2\ ;\ 1).$$

1. Montrer que les points A, B et C déterminent un plan.

2. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

3. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

   a. Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).

   b. Justifier que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne :

$$2x - y + z + 1 = 0.$$

   c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

4. On appelle H le point de coordonnées $\left(-\frac{2}{3}\ \frac{4}{3}\ ;\ \frac{5}{3}\right)$.

   Vérifier que H est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

5. On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par $V = \frac{1}{3}B \times h$, où B est l'aire d'une base du tétraèdre et h est sa hauteur relative à cette base.

   a. Montrer que $\text{DH} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

   b. En déduire le volume du tétraèdre ABCD.

6. On considère la droite d de représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcr} x & = & 1-2k \\ y & = & -3k \\ z & = & 1+\ \ k \end{array}\right. \quad \text{où } k \text{ décrit } \mathbb{R}.$$

   La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

Exercice 4 — 5 points

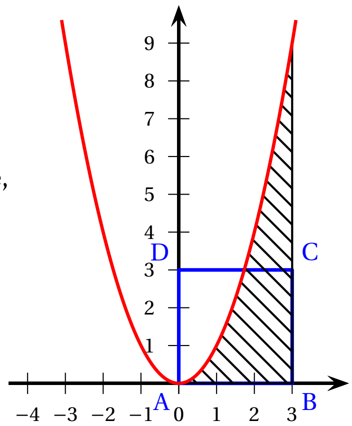
Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. Soient E et F les ensembles $E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7\}$ et

   $F = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9\}$.

   Affirmation n° 1 : Il y a davantage de 3-uplets d'éléments distincts de E que de combinaisons à 4 éléments de F.

2. Dans le repère orthonormé ci-contre, on a représenté la fonction carré, notée f, ainsi que le carré ABCD de côté 3.
   Affirmation n° 2 : La zone hachurée et le carré ABCD ont la même aire.



3. On considère l'intégrale J ci-dessous :

$$J = \int_1^2 x\ln(x)\,\mathrm{d}x.$$

   Affirmation n° 3 : Une intégration par parties permet d'obtenir : $J = \dfrac{7}{11}$.

4. Sur $\mathbb{R}$, on considère l'équation différentielle

$$(E) : \quad y' = 2y - \mathrm{e}^x.$$

   Affirmation n° 4 : La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x}$ est solution de l'équation différentielle (E).

5. Soit x donné dans $[0 ; 1[$. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = (x-1)\mathrm{e}^n + \cos(n).$$

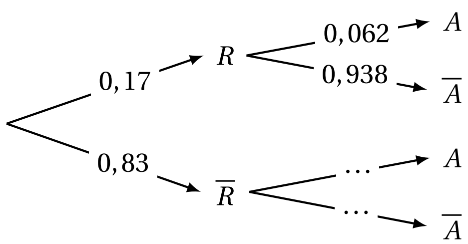
   Affirmation n° 5 : La suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

Corrigés : Polynésie 17 juin 2025

Exercice 1 — 5 points

Partie A.

1. Un arbre de probabilité représentant la situation est :



2. **a.** $P(R \cap A) = P(R) \times P_R(A) = 0,17 \times 0,062 = 0,01054$

La probabilité que l'enfant interrogé habite en zone rurale et soit atteint d'allergie alimentaire vaut 0,010 54.

b. Les évènements R et $\overline{R}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales : $P(A) = P\left(R \cap A\right) + P\left(\overline{R} \cap A\right)$

On a donc : $0,09 = 0,01054 + P\left(\overline{R} \cap A\right)$

D'où $P\left(\overline{R} \cap A\right) = 0,09 - 0,01054 = 0,07946$

La probabilité que l'enfant interrogé habite en zone urbaine et soit atteint d'allergie alimentaire vaut 0,079 46.

c. $P_{\overline{R}}(A) = \dfrac{P\left(\overline{R} \cap A\right)}{P\left(\overline{R}\right)} = \dfrac{0,07946}{0,83} = \dfrac{3973}{41500} \approx 0,09573.$

La probabilité qu'un enfant soit atteint d'allergie alimentaire sachant qu'il habite en zone urbaine vaut 0,095 7 arrondi à 10^{-4}.

Partie B.

1. On répète 100 fois de manière identique et indépendante une expérience aléatoire à deux issues dont le succès « L'enfant est atteint d'une allergie alimentaire » a une probabilité $p = 0,09$.

   La variable aléatoire X compte le nombre de succès.

   Donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,09$.

2. À l'aide de la calculatrice : $P(X \geqslant 10) \approx 0,41249$

   La probabilité qu'au moins 10 enfants parmi les 100 interrogés soient atteints d'allergie alimentaire vaut 0,412 5 arrondi à 10^{-4}.

Partie C.

1. Dans le contexte de l'exercice, la variable aléatoire M_{20} représente l'âge moyen d'apparition des premiers symptômes pour les 20 enfants.

2. M_{20} est la moyenne d'un échantillon de taille n d'une variable aléatoire A telle que $E(A) = 4$ et $V(A) = 2,25$ d'où :

   $E\left(M_{20}\right) = E(A) = 4$

   $V\left(M_{20}\right) = \dfrac{V(A)}{20} = \dfrac{2,25}{20} = 0,1125$

3. L'évènement « $2 < M_{20} < 6$ » revient à

   $|M_{20} - 4| < 2$ et $P\left(|M_{20} - 4| < 2\right) = 1 - P\left(|M_{20} - 4| \geqslant 2\right)$.

   Or, d'après l'inégalité de concentration, pour tout réel $t > 0$:

   $P\left(|M_n - E(A)| \geqslant t\right) \leqslant \dfrac{V(A)}{nt^2}$.

   Soit ici, avec $n = 20$ et $t = 2$: $P\left(|M_{20} - 4| \geqslant 2\right) \leqslant \dfrac{2,25}{20 \times 2^2}$,

   d'où $P\left(|M_{20} - 4| < 2\right) \geqslant 1 - \dfrac{2,25}{80} P\left(|M_{20} - 4| < 2\right) \quad \geqslant \dfrac{311}{320}$

   Or $\dfrac{311}{320} \approx 0,9719$,

   donc : $P(2 < M_{20} < 6) > 0,97$.

   Dans le contexte de l'exercice cela signifie que dans plus de 97 % des cas, les premiers symptômes apparaissent entre 2 et 6 ans.

Exercice 2 5 points

1. Le sol est le plan P_0 d'équation $z = 0$ donc l'avion touchera le sol lorsque $z = 0$, c'est à dire $11 - 4t = 0$ soit $t = \dfrac{11}{4}$.

Les coordonnées du point S sont donc : $\begin{cases} x = -11 + 5 \times \dfrac{11}{4} = \dfrac{11}{4} \\ y = -5 + \dfrac{11}{4} = -\dfrac{9}{4} \\ z = 0 \end{cases}$

S'il ne dévie pas de sa trajectoire, les coordonnées du point S en lequel l'avion Bêta touchera le sol sont : $\left(\dfrac{11}{4}; -\dfrac{9}{4}; 0\right)$.

2. **a.** L'avion Alpha transmet à la tour sa position en A$(-7;1;7)$ et sa trajectoire est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Une représentation paramétrique de la droite d_A caractérisant la trajectoire de l'avion Alpha est donc : $\begin{cases} x = -7 + 2s \\ y = 1 - s \\ z = 7 - 3s \end{cases}$

b. Les deux avions entreront en collision si leur deux trajectoires se coupent, c'est à dire si les droites d_A et d_B sont sécantes.

Cherchons s'il existe un couple $(t\ ;\ s)$ tel que le point de paramètre t sur d_B soit confondu avec le point de paramètre s sur d_A, pour cela, résolvons :

$$\begin{cases} -11 + 5t = -7 + 2s \\ -5 + t = 1 - s \\ 11 - 4t = 7 - 3s \end{cases} \iff \begin{cases} -11 + 5(6 - s) = -7 + 2s \\ t = 6 - s \\ 11 - 4(6 - s) = 7 - 3s \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -11 + 30 - 5s = -7 + 2s \\ t = 6 - s \\ 11 - 24 + 4s = 7 - 3s \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 26 = 7s \\ t = 6 - s \\ 7s = 20 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} s = \dfrac{26}{7} \\ t = 6 - s \\ s = \dfrac{20}{7} \end{cases}$$

Le système n'a pas de solution, donc les deux avions ne peuvent pas rentrer en collision.

3. **a.** L'avion Alpha passe par la position E$(-3\ ;\ -1\ ;\ 1)$ s'il existe un réel s tel que le point de paramètre s sur d_A ait pour coordonnées $(-3\ ;\ -1\ ;\ 1)$, pour cela, résolvons :

$$\begin{cases} -3 = -7 + 2s \\ -3 = 1 - s \\ 1 = 7 - 3s \end{cases} \iff \begin{cases} 4 = 2s \\ -4 = -s \\ -6 = -3s \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} s = 2 \\ s = 2 \\ s = 2 \end{cases}$$

Le point E$(-3\ ;\ -1\ ;\ 1)$ correspond au point de paramètre $s = 2$ donc l'avion Alpha passe par le point E.

b. Le plan P_E est perpendiculaire à la droite d_A dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{u}$ est un vecteur normal au plan P_E.

Une équation cartésienne du plan P_E est donc de la forme : $2x - y - 3z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.

De plus, le point E appartient au plan P_E donc les coordonnées du point E vérifient l'équation du plan P_E, d'où : $2x_E - y_E - 3z_E + d = 0$ soit $2 \times (-3) - (-1) - 3 \times 1 + d = 0$;

on a donc $-6 + 1 - 3 + d = 0 \iff d = 8$

Conclusion : ine équation cartésienne du plan P_E est bien : $2x - y - 3z + 8 = 0$.

c. Déterminons les coordonnées du point F, intersection du plan P_E et de la droite d_B.

Les coordonnées des points d'intersection sont solutions du système

$$\begin{cases} x = -11 + 5t \\ y = -5 + t \\ z = 11 - 4t \\ 2x - y - 3z + 8 = 0 \end{cases}$$

On cherche donc t qui vérifie $2(-11 + 5t) - (-5 + t) - 3(11 - 4t) + 8 = 0$ c'est-à-dire :

$-22 + 10t + 5 - t - 33 + 12t + 8 = 0 \iff 21t = 42 \iff t = \dfrac{42}{21} = 2$.

On en déduit $\begin{cases} x = -11 + 5t = -11 + 5 \times 2 = -1 \\ y = -5 + t = -5 + 2 = -3 \\ z = 11 - 4t = 11 - 4 \times 2 = 11 - 8 = 3 \end{cases}$

Le point d'intersection du plan P_E et de la droite d_B est le point $F(-1\ ;\ -3\ ;\ 3)$.

d. Le repère est orthonormé on peut donc utiliser les coordonnées pour calculer les distances.

$\text{EF} = \sqrt{(x_F - x_E)^2 + \left(y_F - y_E\right)^2 + (z_F - z_E)^2}$

$\text{EF} = \sqrt{(-1 - (-3))^2 + (-3 - (-1))^2 + (3 - 1)^2}$

$\text{EF} = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (2)^2}$

$\text{EF} = \sqrt{4 + 4 + 4}$

$\text{EF} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

d'où EF$\approx 3{,}464\,1$ km soit EF$\approx 3\,646$ m à 1 m près.

4. Si les avions Alpha et Bêta sont respectivement en E et F au même instant, la distance les séparant est de $3\,646$ m soit environ $\dfrac{3\,646}{1\,852} \approx 1{,}97$ mille nautique.

Or $1{,}97 < 3$ donc leur distance de sécurité n'est pas respectée.

Exercice 3 — 5 points

Partie A : Étude des fonctions f_n pour $n \geqslant 1$

1. a. On dérive un produit de deux fonctions dérivables sur $[0\ ;\ +\infty[$. Soit x un réel positif :

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= nx^{n-1} \times \mathrm{e}^{-x} + x^n \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) = \left(nx^{n-1} - x^n\right)\mathrm{e}^{-x} \\ &= \left(n \times x^{n-1} - x \times x^{n-1}\right)\mathrm{e}^{-x} = \left(n - x\right)x^{n-1}\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}.$$

b. La fonction exponentielle est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, donc

$\forall x \in [0 ; +\infty[, \quad \mathrm{e}^{-x} > 0$;

Sur $[0\ ;\ +\infty[$, x est donc positif, et donc x^{n-1} est positif aussi;

Ainsi, $f_n'(x)$ est du signe du facteur $(n-x)$.

On a $\quad n-x>0 \iff n>x$, donc c'est pour cela que l'on a bien $f_n'(x)>0$ sur $[0\ ;\ n[$, de façon immédiate, $f_n'(n)=0$ et, par élimination, $f_n'(x)<0$ sur $]n\ ;\ +\infty[$.

Le signe de $f_n'(x)$ est donc justifié.

Par conséquent, on en déduit les variations de f_n : sur $[0\ ;\ n]$, f_n' est à valeurs positives, ne s'annulant que de façon isolée (pour $x=n$), donc f_n est strictement croissante sur $[0\ ;\ n]$.

Sur $[n\ ;\ +\infty[$, f_n' est à valeurs négatives, ne s'annulant que de façon isolée (pour $x=n$), donc f_n est strictement décroissante sur $[n\ ;\ +\infty[$.

On calcule les images de 0 et n par f_n :

- $f_n(0)=0^n\times \mathrm{e}^{-0}=0\times 1=0$;
- $f_n(n)=n^n\times \mathrm{e}^{-n}=n^n\times\dfrac{1}{\mathrm{e}^n}=\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$;

Enfin, calculons la limite de f_n quand x tend vers $+\infty$:

$\forall x\in]0\ ;\ +\infty[,\quad f_n(x)=x^n\mathrm{e}^{-x}=\dfrac{x^n}{\mathrm{e}^x}=\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n}}$

La propriété des croissances comparées dit que, pour tout n naturel non nul : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x^n}=+\infty$;

Par limite du quotient, on en déduit : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f_n(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n}}=0$.

La courbe $\mathscr{C}_n$ admet donc une asymptote horizontale d'équation $y=0$ au voisinage de $+\infty$.

On a ainsi justifié tous les éléments de ce tableau de variations.

2. Pour n entier naturel non nul, on a : $\quad f_n(1)=1^n\times\mathrm{e}^{-1}=1\times\mathrm{e}^{-1}=\mathrm{e}^{-1}$.

Cela confirme que la courbe $\mathscr{C}_n$ contient bien le point $\mathrm{A}\left(1\ ;\ \mathrm{e}^{-1}\right)$.

Partie B : Étude des intégrales $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ pour $n\geqslant 0$

1. a. La fonction f_0 est à valeurs positives sur $[0;1]$, donc I_0 correspond à l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface délimitée par : la courbe $\mathscr{C}_0$, l'axe des abscisses, et les deux droites verticale d'équation $x=0$ et $x=1$.

b. De la même façon, chaque intégrale I_n est la surface délimitée par la courbe $\mathscr{C}_n$, l'axe des abscisses, et les deux droites verticales d'équation $x=0$ et $x=1$.

Graphiquement, on conjecture que chacune de ces surface est incluse dans celles correspondant à un entier n plus petit, donc les aires sont de plus en plus petites, et la suite (I_n) semble décroître, en étant minorée par 0, la suite serait convergente, vers une limite positive, proche de 0, ou vers 0, en effet, l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_{100}$ est déjà très faible.

2. On a :
$$\begin{aligned}I_0&=\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1\\&=\left(-\mathrm{e}^{-1}\right)-\left(-\mathrm{e}^{-0}\right)=-\mathrm{e}^{-1}+\mathrm{e}^0\\&=1-\mathrm{e}^{-1}\end{aligned}$$

3. a. Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned}x\in[0\ ;\ 1]&\implies 0\leqslant x\leqslant 1\\&\implies 0\times x^n\leqslant x\times x^n\leqslant 1\times x^n,\quad\text{car } x^n\geqslant 0\\&\implies 0\leqslant x^{n+1}\leqslant x^n\end{aligned}$$

On arrive bien à l'inégalité demandée.

b. Soient n un entier naturel et x un réel de $[0\ ;\ 1]$. En multipliant l'inégalité précédente par e^{-x}, qui est un nombre réel supérieur à zéro, il vient : $\quad 0 \leqslant x^{n+1}\mathrm{e}^{-x} \leqslant x^n\mathrm{e}^{-x} \quad$ soit $\quad 0 \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$.

Comme on intègre entre 0 et 1, avec $0 < 1$, par positivité de l'intégrale, on en déduit :

$$\int_0^1 0\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 f_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{soit} \quad 0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n.$$

4. D'après la question précédente, on a, pour tout entier naturel n, simultanément :

- $0 \leqslant I_n$, donc la suite (I_n) est minorée par 0 ;
- $I_{n+1} \leqslant I_n$, donc la suite (I_n) est décroissante ;

La suite étant décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente, vers une limite ℓ supérieure ou égale à 0.

5. Soit n un entier naturel n.

On pose : $\begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(x) = (n+1)x^n \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{cases}$

Toutes ces fonctions étant continues car dérivables sur $[0; 1]$, on a :

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \int_0^1 f_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 u(x) \times v'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \Big[u(x) \times v(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 u'(x) \times v(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{formule d'intégration par parties} \\
&= \Big[x^{n+1} \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right)\Big]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x \\
&= \left(-1^{n+1} \times \mathrm{e}^{-1}\right) - \left(-0^{n+1} \times \mathrm{e}^{-0}\right) + (n+1)\int_0^1 x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \quad \text{par linéarité} \\
&= (n+1)I_n - \frac{1}{\mathrm{e}}
\end{aligned}$$

On arrive bien à la relation de récurrence annoncée.

6. a. Supposons que la limite ℓ est supérieure à zéro.

Alors, par limite du produit, on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (n+1)I_n = +\infty$

Puis par limite de la somme : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (n+1)I_n - \frac{1}{\mathrm{e}} = +\infty.$

Soit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_{n+1} = +\infty$, autrement dit, la suite de terme général I_{n+1} **diverge** vers $+\infty$.

Or la suite de terme général I_{n+1} a la même limite que la suite de terme général I_n, qui elle **converge** vers un réel positif ℓ (dont on peut dire qu'il est inférieur à $I_0 = 1 - \mathrm{e}^{-1}$).

L'unicité de la limite est donc en contradiction avec ces résultats.

b. Dans la question précédente, on a fait une supposition non étayée : on a supposé $\ell > 0$. Cette supposition conduisant à une contradiction, cela démontre, par l'absurde que l'on a $\ell \leqslant 0$.

Comme on savait, depuis la question **4.**, que ℓ est un réel positif, on peut donc en déduire que l'on a : $\ell = 0$.

La suite (I_n) converge donc vers 0.

7. Ici, l'appel `mystère(100)` renvoie une liste (stockée dans la variable `L`) contenant les valeurs (approchées) des 101 premiers termes de la suite, de I_0 à I_{100}.

En effet, I est initialisée (ligne 2) à la valeur I_0, puis L est initialisée (ligne 3) en tant que liste contenant la valeur I_0.

Ensuite, on rentre dans un boucle à `n = 100` répétitions (pour `i` allant de 0 à 99), et dans chaque exécution, la variable `I` est mise à jour (ligne 5) en utilisant la relation de récurrence de la suite (I_n), donc passe de la valeur d'un terme à la valeur du terme suivant dans la suite (I_n). Cette nouvelle valeur est ensuite ajoutée à la fin de la liste `L` (ligne 7).

En sortie de boucle, on a donc appliqué 100 fois la relation de récurrence, donc la variable `I` contient bien la valeur (approchée de) $I_{0+100} = I_{100}$, qui a été la dernière ajoutée à la liste L.

Exercice 4 5 points

1. **Affirmation 1 : Vraie.**

   On reconnaît une forme présente dans le cours : les équations différentielles de la forme $y' = ay + b$, avec a et b réels non nuls ont pour solution les fonctions de la forme : $x \longmapsto k\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$, où k est un réel quelconque.

   Ici, on applique cette propriété avec $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = 4$, ce qui donne bien l'équation différentielle $y' = \dfrac{1}{2}y + 4$, ayant pour solution les fonction de la forme : $x \longmapsto k\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - \dfrac{4}{\frac{1}{2}}$ soit $x \longmapsto k\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - 8$, avec $k \in \mathbb{R}$.

2. **Affirmation 2 : Vraie.**

   Une équipe de volley-ball telle que décrite est constituée d'un couple de deux éléments. Le premier élément de ce couple est un ensemble de 3 élèves filles distinctes (donc pas de répétition), qui n'ont pas de rôle particulier, donc on parle d'un ensemble, et pas d'une liste ou d'un triplet (donc pas de notion d'ordre) : on va utiliser des combinaisons.

   3 filles choisies parmi les 18 de la classe : il y a $\dbinom{18}{3} = 816$ façons de choisir les trois filles qui constitueront ce premier ensemble.

   Le deuxième élément du couple sera un ensemble de trois élèves garçons, choisis avec les même principes.

   3 garçons choisis parmi les 14 de la classe : il y a $\dbinom{14}{3} = 364$ façons de choisir les trois garçons qui constitueront ce second ensemble.

   Finalement, par principe multiplicatif, une équipe est un ensemble de trois filles choisi parmi les 816 ensembles possibles, associé à un ensemble de garçons parmi les 364 ensembles possibles : il y a donc $816 \times 364 = 297\,024$ équipes différentes possibles.

3. **Affirmation 3 : Vraie.**

   Pour tout n entier naturel, on a :

   $$\begin{aligned} -1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1 &\implies 1 \leqslant 2 + \cos(n) \leqslant 3 \\ &\implies \frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{2+\cos(n)} \leqslant \frac{1}{1} \quad \text{fonction inverse est décroissante sur } \mathbb{R}_+^* \\ &\implies \frac{n}{3} \leqslant \frac{n}{2+\cos(n)} \quad \text{car } n \geqslant 0 \\ &\implies \frac{n}{3} \leqslant v_n \end{aligned}$$

   Par limite du quotient, on a immédiatement : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{3} = +\infty$,

   donc, par comparaison, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$, ce qui est l'affirmation 3.

4. **Affirmation 4 : Fausse.**

   On a : $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}4\\-2\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, donc, comme le repère est orthonormé, on a :

   $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 4 \times 1 + (-2) \times 0 + 6 \times 1 = 10$, la première partie de l'affirmation est donc vraie.

   Cependant, on peut aussi calculer les normes et en déduire le cosinus de l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$, défini par les deux vecteurs.

   $\mathrm{AB} = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 6^2} = \sqrt{16 + 4 + 36} = \sqrt{56} = \sqrt{4 \times 14} = 2\sqrt{14}$.

   $\mathrm{AC} = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 0 + 1} = \sqrt{2}$.

   On a donc, avec la définition trigonométrique du produit scalaire :

   $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \mathrm{AB} \times \mathrm{AC} \times \cos\left(\widehat{\mathrm{BAC}}\right) = 2\sqrt{14} \times \sqrt{2} \times \cos\left(\widehat{\mathrm{BAC}}\right) = 4\sqrt{7}\cos\left(\widehat{\mathrm{BAC}}\right)$

En égalant ces deux expressions du produit scalaire, on déduit :

$10 = 4\sqrt{7}\cos\left(\widehat{\text{BAC}}\right)$ qui équivaut à : $\cos\left(\widehat{\text{BAC}}\right) = \dfrac{10}{4\sqrt{7}} = \dfrac{5\sqrt{7}}{14}$.

Il se trouve que le cosinus de 30° est connu, il vaut $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et est donc différent de celui trouvé ici : l'angle ne mesure dont pas 30°.

Remarque : une valeur approchée d'une mesure de l'angle peut être obtenue à la calculatrice :

$\widehat{\text{BAC}} = \arccos\left(\dfrac{5\sqrt{7}}{14}\right) \approx 19°$.

5. **Affirmation 5 : Vraie.**

   En effet, pour tout x réel strictement positif, on a : $h''(x) = x\ln(x) - 3x = x\big(\ln(x) - 3\big)$

   x étant strictement positif, le signe de $h''(x)$ est donc le signe de $\ln(x) - 3$.

   $$\begin{aligned} x \in \left[\text{e}^3\,;\,+\infty\right[&\implies \text{e}^3 \leqslant x \\ &\implies \ln\left(\text{e}^3\right) \leqslant \ln(x) \quad \text{car ln est croissante sur } \mathbb{R}*+ \\ &\implies 3 \leqslant \ln(x) \\ &\implies 0 \leqslant \ln(x) - 3 \\ &\implies 0 \leqslant h''(x) \end{aligned}$$

   Sur l'intervalle $\left[\text{e}^3\,;\,+\infty\right[$, la dérivée seconde de h est donc à valeurs positives, donc la dérivée première de h est croissante, et donc h elle-même est bien convexe sur cet intervalle.