



Loi des grands nombres



Activité

On considère une pièce de monnaie équilibrée que l'on lance n fois. Pour tout entier i entre 1 et n , on appelle X_i la variable aléatoire égale à 1 si le résultat du i -ème lancer est PILE et 0 sinon.

1. Pour i entier entre 1 et n ; X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0,5$. Ainsi, pour i entier entre 1 et n , on a :

$$\begin{cases} E(X_i) = p = 0,5 \\ V(X_i) = p(1-p) = 0,5 \times (1-0,5) = 0,25. \end{cases}$$

2. Par linéarité de l'espérance, on obtient :

$$\begin{aligned} E(M_n) &= E\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right) \\ &= \frac{E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)}{n} \\ &= \frac{np}{n} \\ &= 0,5. \end{aligned}$$

Les variables aléatoires X_i , avec $1 \leq i \leq n$, sont indépendantes, donc :

$$\begin{aligned} V(M_n) &= V\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right) \\ &= \frac{V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n)}{n^2} \\ &= \frac{np(1-p)}{n^2} \\ &= \frac{0,25}{n}. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Tchebychev, on obtient :

$$p(|M_n - 0,5| \geq \delta) \leq \frac{V(M_n)}{0,1^2} \Leftrightarrow p(|M_n - 0,5| \geq 0,1) \leq \frac{0,25}{n\delta^2}.$$

3. Pour $\delta = 0,1$.

- (a) Pour déterminer un entier n_1 à partir duquel on a nécessairement $p(|M_n - 0,5| \geq 0,1) \leq 0,01$ il suffit de résoudre l'inéquation $\frac{0,25}{n \times 0,1^2} \leq 0,01$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \frac{0,25}{n \times 0,1^2} \leq 0,01 &\Leftrightarrow \frac{0,25}{n} \leq 0,0001 \\ &\Leftrightarrow \frac{n}{0,25} \geq 10000 \\ &\Leftrightarrow n \geq 10000 \times 0,25 \\ &\Leftrightarrow n \geq 2500. \end{aligned}$$

On en déduit alors que $n_1 = 2500$.

- (b) Pour déterminer un entier n_2 à partir duquel on a nécessairement $p(|M_n - 0,5| \geq 0,1) \leq 0,001$ il suffit de résoudre l'inéquation $\frac{0,25}{n \times 0,1^2} \leq 0,001$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \frac{0,25}{n \times 0,1^2} \leq 0,001 &\Leftrightarrow \frac{0,25}{n} \leq 0,00001 \\ &\Leftrightarrow \frac{n}{0,25} \geq 100000 \\ &\Leftrightarrow n \geq 100000 \times 0,25 \\ &\Leftrightarrow n \geq 25000. \end{aligned}$$

On en déduit alors que $n_1 = 25000$.

- (c) On sait que :
$$\begin{cases} 0 \leq p(|M_n - 0,5| \geq 0,1) \leq \frac{0,0025}{n} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{0,0025}{n} = 0. \end{cases}$$

D'après le théorème des gendarmes : $\lim_{n \rightarrow +\infty} p(|M_n - 0,5| \geq 0,1) = 0$.

- (d) Pour n suffisamment grand, la valeur de M_n se rapproche et se stabilise aux alentours de 0,5.

Suite

4. Pour tout réel strictement positif $\delta > 0$, on obtient le même résultat que pour $\delta = 0,1$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p(|M_n - 0,5| \geq \delta) = 0.$$

5. (a) M_n est la variable aléatoire moyenne de l'échantillon $(X_1; X_2; \dots; X_n)$.

(b) En répétant l'expérience aléatoire un grand nombre de fois la fréquence d'obtenir pile se stabilise autour de 0,5.

Soient X_1, \dots, X_n n variables aléatoires indépendantes de même loi, d'espérance μ . Alors, pour tout réel $\delta > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p(|M_n - \mu| \geq \delta) = 0.$$

Bilan

Exercice 1

En France en 2018, selon l'INSEE, 75,4 % des individus de 15 à 29 ans ont réalisé un achat sur Internet au cours des 12 derniers mois.

On interroge 500 personnes de la population française, âgées d'entre 15 et 29 ans, pour savoir si elles ont réalisé un achat sur Internet au cours des 12 derniers mois. Au vu de la taille de la population en France, on suppose que les tirages au sort successifs ne changent pas les probabilités que la réponse soit positive ou non, et donc que ce prélèvement de 500 personnes par tirage au sort peut être assimilé à un tirage avec remise.

On considère la liste de variables aléatoires $(X_1; X_2; \dots; X_{500})$ où X_i vaut 1 si la i -ème personne a réalisé un achat sur Internet au cours de 12 derniers mois et 0 sinon, afin de modéliser l'enquête auprès des 500 personnes.

1. Le prélèvement effectué est assimilé à un tirage avec remise donc les X_i , avec $1 \leq i \leq 500$, sont indépendantes. Les probabilités sont également supposées identiques.

Les X_i suivent alors toutes la même loi de Bernoulli de même paramètre $p = 0,754$.

Ainsi, la liste $(X_1; X_2; \dots; X_{500})$ peut être considérée un échantillon de variables aléatoires indépendantes et de même loi.

2. **Méthode 1** : Par linéarité de l'espérance, on obtient : $E(S) = 500E(X_i)$.

Par ailleurs, X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $p = 0,754$, ainsi $E(S) = 500 \times 0,754 = 377$.

De plus, l'indépendance des variables aléatoires X_i implique que $V(S) = nV(X_i)$. En conséquence, $V(S) = 500 \times 0,754 \times (1 - 0,754) = 92,742$.

Méthode 2 : Les X_i sont indépendantes et suivent toutes une même loi de Bernoulli de paramètre $p = 0,754$ donc S suit une loi binomiale de paramètres $n = 500$ et $p = 0,754$. Dès lors,

$$\begin{cases} E(S) = np = 500 \times 0,754 = 377 \\ V(S) = np(1-p) = 500 \times 0,754 \times (10,754) = 92,742. \end{cases}$$

Exercice 2

Une urne contient 20 000 billes dont 70 % portent le nombre 1, 25 % le nombre 2 et les autres portent le nombre 9. On effectue un prélèvement de 3 billes. On appelle S la variable aléatoire donnant la somme des trois nombres obtenus.

On suppose que le prélèvement de 3 billes est assimilable à un tirage avec remise.

1. Ce prélèvement peut être assimilé à un tirage avec remise, car la proportion de billes prélevés est faible par rapport à l'effectif total.

2. (a) Les variables X_1, X_2 et X_3 suivent la même loi donnée par :

x_i	1	2	9
$P(X = x_i)$	0,7	0,25	0,05

(b) On a :

$$\begin{cases} E(X) = 1 \times 0,7 + 2 \times 0,25 + 9 \times 0,05 = 1,65 \\ E(X^2) = 1^2 \times 0,7 + 2^2 \times 0,25 + 9^2 \times 0,05 = 5,75 \\ V(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2 = 3,0275. \end{cases}$$

Par linéarité de l'espérance, on obtient :

$$\begin{aligned} E(S) &= E(X_1 + X_2 + X_3) \\ &= E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) \\ &= 3E(X) \\ &= 4,95. \end{aligned}$$

Les variables X_1 , X_2 et X_3 sont indépendantes, donc :

$$\begin{aligned} V(S) &= V(X_1 + X_2 + X_3) \\ &= V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) \\ &= 3V(X) \\ &= 9,0825. \end{aligned}$$

Exercice 3

Une urne contient deux jetons sur lesquels figure le nombre 3, deux jetons sur lesquels figure le nombre 5 et un jeton sur lequel figure le nombre 10.

1. On tire un jeton dans cette urne et on considère la variable aléatoire X donnant le nombre obtenu. La loi de la variable X est donnée par :

x_i	3	5	10
$P(X = x_i)$	0,4	0,4	0,2

Ainsi,

$$\begin{cases} E(X) = 3 \times 0,4 + 5 \times 0,4 + 10 \times 0,2 = 5,2. \\ E(X^2) = 3^2 \times 0,4 + 5^2 \times 0,4 + 10^2 \times 0,2 = 33,6 \\ V(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2 = 6,56. \end{cases}$$

2. Posons, $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$, avec n le nombre de tirage avec remise.

Ainsi, $E(\bar{X}) = E(X)$ et $V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{n}$.

On cherche le nombre de tirage tel que $P(5 < \bar{X} < 5,4) \geq 0,95$, autrement dit,

$$\begin{aligned} P(-0,2 < \bar{X} - 5,2 < 0,2) \geq 0,95 &\Leftrightarrow P(|\bar{X} - 5,2| < 0,2) \geq 0,95 \\ &\Leftrightarrow -P(|\bar{X} - 5,2| < 0,2) \leq -0,95 \\ &\Leftrightarrow 1 - P(|\bar{X} - 5,2| < 0,2) \leq 0,05 \\ &\Leftrightarrow P(|\bar{X} - 5,2| \geq 0,2) \leq 0,05. \end{aligned}$$

De plus, en utilisant l'inégalité de Tchebychev, on obtient : $P(|\bar{X} - E(X)| \geq 0,2) \leq \frac{6,56}{n \times 0,2^2}$.

Par ailleurs, $\frac{6,56}{n \times 0,2^2} \leq 0,05$ ce qui implique $n \geq \frac{6,56}{0,002}$, soit $n \geq 3280$. D'où le résultat.

Exercice 4

On lance un dé équilibré à quatre faces numérotées de 1 à 4.

1. La loi de la variable aléatoire R est donnée par :

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,25	0,25	0,25	0,25

Ainsi,

$$\begin{cases} E(X) = 1 \times 0,25 + 2 \times 0,25 + 3 \times 0,25 + 4 \times 0,25 = 2,5. \\ E(X^2) = 1^2 \times 0,25 + 2^2 \times 0,25 + 3^2 \times 0,25 + 4^2 \times 0,25 = 7,5. \\ V(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2 = 1,25. \end{cases}$$

2. Posons, $\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_n}{n}$, avec n le nombre de lancers.

Ainsi, $E(\bar{R}) = E(R)$ et $V(\bar{R}) = \frac{V(R)}{n}$.

On cherche le nombre de tirage tel que $P(2 < \bar{R} < 3) \geq 0,99$, autrement dit,

$$\begin{aligned} P(-0,5 < \bar{R} - 2,5 < 0,5) \geq 0,99 &\Leftrightarrow P(|\bar{R} - 2,5| < 0,5) \geq 0,99 \\ &\Leftrightarrow -P(|\bar{R} - 2,5| < 0,5) \leq -0,99 \\ &\Leftrightarrow 1 - P(|\bar{R} - 2,5| < 0,5) \leq 0,01 \\ &\Leftrightarrow P(|\bar{R} - 2,5| \geq 0,5) \leq 0,01. \end{aligned}$$

De plus, en utilisant l'inégalité de Tchebychev, on obtient : $P(|\bar{R} - E(R)| \geq 0,5) \leq \frac{1,25}{n \times 0,5^2}$.

Par ailleurs, $\frac{1,25}{n \times 0,5^2} \leq 0,01$ ce qui implique $n \geq \frac{1,25}{0,0025}$, soit $n \geq 500$. D'où le résultat.

Exercice 5

Sara est factrice et distribue le courrier de 2 500 logements. Elle a constaté que le nombre de logements ayant du courrier lors d'une tournée suit la loi binomiale de paramètres $n = 2\,500$ et $p = 0,6$.

Pour les besoins d'une enquête, Sara relève pendant 200 tournées supposées indépendantes le nombre de logements pour lesquels elle dépose du courrier.

1. Soit X_i le nombre de logements ayant du courrier lors de la tournée n°i. Pour tout i entre 1 et 200,

$$X_i \sim \mathcal{B}(2500; 0,6) \text{ donc } \begin{cases} E(X_i) = np = 1500 \\ V(X_i) = np(1-p) = 600. \end{cases}$$

2. (a) Soit $M = \frac{X_1 + \dots + X_{200}}{200}$. Ainsi, $E(M) = E\left(\frac{X_1 + \dots + X_{200}}{200}\right) = 1500$. Dès lors,

$$\begin{aligned} P(M \notin]1400; 1600[) &= 1 - P(M \in]1400; 1600[) \\ &= 1 - P(1400 < M < 1600) \\ &= 1 - P(1400 - 1500 < M - 1500 < 1600 - 1500) \\ &= 1 - P(-100 < M - 1500 < 100) \\ &= 1 - P(|M - 1500| < 100) \\ &= P(|M - 1500| \geq 100) \\ &\leq \frac{V(M)}{100^2} \text{ selon l'inégalité de Tchebychev.} \end{aligned}$$

$$\text{Or, } V(M) = \frac{V(X_i)}{200} = 3. \text{ Donc, } P(M \notin]1400; 1600[) \leq \frac{3}{10000}.$$

- (b) La probabilité que la moyenne des tournées s'écarte de plus de 100 logements de 1500 est très faible, soit inférieure à 0,03%.

Exercice 6

On considère un échantillon $(X_1; X_2; \dots; X_{30})$ de 30 variables aléatoires suivant la loi $\mathcal{B}(20; 0,6)$

et $M = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{30}}{30}$ la variable aléatoire moyenne de l'échantillon.

Pour tout $1 \leq i \leq 30$, $X_i \sim \mathcal{B}(20; 0,6)$. Ainsi,

$$\begin{cases} E(X_i) = np = 12 \\ V(X_i) = np(1-p) = 12 \times 0,4 = 4,8 \end{cases} \text{ et donc } \begin{cases} E(M) = E(X_i) = 12 \\ V(M) = \frac{V(X_i)}{30} = 0,16. \end{cases}$$

En utilisant l'inégalité de Tchebychev, on obtient : $p(|M - 12| \geq 4) \leq \frac{0,16}{4^2}$, soit $p(|M - 12| \geq 4) \leq 0,01$.

Exercice 7

100 personnes jouent indépendamment à un même jeu dont la variable aléatoire associée au gain (en euros) a pour espérance 10 et pour variance 2.

Soit $M = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{100}}{100}$ la variable aléatoire représentant le gain moyen. On a pour tout $1 \leq i \leq 100$,

$E(X_i) = 10$ et $V(X_i) = 2$. Ainsi, $E(M) = 10$ et $V(M) = \frac{V(X_i)}{100} = 0,02$. Dès lors,

$$\begin{aligned} P(7 < M < 13) &= P(7 - 10 < M - 10 < 13 - 10) \\ &= P(-3 < M - 10 < 3) \\ &= P(|M - 10| < 3) \\ &= 1 - P(|M - 10| \geq 3). \end{aligned}$$

En conséquence, en utilisant l'inégalité de Tchebychev, on obtient :

$$\begin{aligned} P(|M - 10| \geq 3) &\leq \frac{V(M)}{3^2} \Leftrightarrow P(|M - 10| \geq 3) \leq \frac{0,02}{9} \\ &\Leftrightarrow -P(|M - 10| \geq 3) \geq -\frac{0,02}{9} \\ &\Leftrightarrow 1 - P(|M - 10| \geq 3) \geq 1 - \frac{0,02}{9} \\ &\Leftrightarrow P(|M - 10| < 3) \geq 1 - \frac{0,02}{9}. \end{aligned}$$

Exercice 8

On considère un échantillon $(X_1; X_2; \dots; X_{200})$ de variables aléatoires d'espérance μ et $M_k = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_k}{k}$ la variable aléatoire moyenne de l'échantillon $(X_1; X_2; \dots; X_k)$ pour k entier entre 1 et 200. On donne ci-dessous le nuage de points $(k; M_k)$. On constate que $\mu = 10$.

