Loi des grands nombres

Activité

On considère une pièce de monnaie équilibrée que l'on lance n fois.
Pour tout entier i entre 1 et n, on appelle X_i la variable aléatoire égale à 1 si le résultat du i-ème lancer est PILE et 0 sinon.

1. Déterminer $E(X_i)$ et $V(X_i)$ pour i entier entre 1 et n.
   ....
   ....
   ....
   ....
2. Soit $M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$.
   Donner une majoration de $p(|M_n - 0,5| \geqslant \delta)$ pour δ un réel positif fixé.
   ....
   ....
   ....
   ....
3. Soit $\delta = 0,1$.
   (a) Déterminer un entier n_1 à partir duquel on a nécessairement $p(|M_n - 0,5| \geqslant \delta) \leqslant 0,01$.
   ....
   ....
   ....
   ....
   (b) Déterminer un entier n_2 à partir duquel on a nécessairement $p(|M_n - 0,5| \geqslant \delta) \leqslant 0,001$.
   ....
   ....
   ....
   ....
   (c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} p(|M_n - 0,5| \geqslant \delta) = 0$.
   ....
   ....
   ....
   ....
   (d) Que peut-on en déduire pour la valeur de M_n quand n devient grand ?
   ....
   ....
4. Reprendre la question 3. (c) avec δ un réel strictement positif quelconque fixé.
   ....
   ....
   ....
   ....
5. (a) Concrètement, à quoi correspond la variable M_n pour l'échantillon associé aux n lancers de cette pièce de monnaie ?
   ....
   ....
   ....
   ....
   (b) Quelle propriété vue en seconde vient-on d'illustrer dans le cas de cette pièce de monnaie ?
   ....
   ....
   ....
   ....

Soient X_1, ..., X_n n variables aléatoires indépendantes de même loi, d'espérance μ. Alors, pour tout réel $\delta > 0$,
....

Bilan

Exercice 1

En France en 2018, selon l'INSEE, 75,4 % des individus de 15 à 29 ans ont réalisé un achat sur Internet au cours des 12 derniers mois.
On interroge 500 personnes de la population française, âgées d"entre 15 et 29 ans, pour savoir si elles ont réalisé un achat sur Internet au cours des 12 derniers mois. Au vu de la taille de la population en France, on suppose que les tirages au sort successifs ne changent pas les probabilités que la réponse soit positive ou non, et donc que ce prélèvement de 500 personnes par tirage au sort peut être assimilé à un tirage avec remise.
On considère la liste de variables aléatoires $(X_1; X_2; \cdots; X_{500})$ où X_i vaut 1 si la i-ème personne a réalisé un achat sur Internet au cours de 12 derniers mois et 0 sinon, afin de modéliser l'enquête auprès des 500 personnes.

1. Expliquer pourquoi la liste $(X_1; X_2; \cdots; X_{500})$ peut être considérée comme un échantillon de variables aléatoires en précisant la loi suivie par les X_i.
2. Soit $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_{500}$. Calculer $E(S)$ et $V(S)$.

Exercice 2

Une urne contient 20 000 billes dont 70 % portent le nombre 1, 25 % le nombre 2 et les autres portent le nombre 9. On effectue un prélèvement de 3 billes. On appelle S la variable aléatoire donnant la somme des trois nombres obtenus. On suppose que le prélèvement de 3 billes est assimilable à un tirage avec remise.

1. Expliquer pourquoi on peut assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise ?
2. On décompose S sous forme $S = X_1 + X_2 + X_3$ où X_i donne le nombre porté par la boule lue en i-ème position pour tout entier i entre 1 et 3.
   (a) Déterminer la loi suivie par X_1 ; X_2 et X_3.
   (b) Calculer $E(S)$ et $V(S)$.

Exercice 3

Une urne contient deux jetons sur lesquels figure le nombre 3, deux jetons sur lesquels figure le nombre 5 et un jeton sur lequel figure le nombre 10.

1. On tire un jeton dans cette urne et on considère la variable aléatoire X donnant le nombre obtenu. Déterminer $E(X)$ et $V(X)$.
2. Combien de tirages avec remise peut-on effectuer dans cette urne pour être sûr au risque de 5 % (ou au seuil de 95 %) que la moyenne des nombres obtenus soit comprise entre 5 et 5,4 exclus ?

Exercice 4

On lance un dé équilibré à quatre faces numérotées de 1 à 4.

1. On appelle R la variable aléatoire donnant le résultat obtenu. Donner $E(R)$ et $V(R)$.
2. Combien de lancers peut-on effectuer pour être sûr au seuil de 99 % que la moyenne des résultats de ces lancers est comprise entre 2 et 3 exclus ?

Exercice 5

Sara est factrice et distribue le courrier de 2 500 logements. Elle a constaté que le nombre de logements ayant du courrier lors d'une tournée suit la loi binomiale de paramètres n = 2 500 et p = 0,6.
Pour les besoins d'une enquête, Sara relève pendant 200 tournées supposées indépendantes le nombre de logements pour lesquels elle dépose du courrier.

1. Soit X_i le nombre de logements ayant du courrier lors de la tournée n°i. Calculer $E(X_i)$ et $V(X_i)$ pour tout i entre 1 et 200.
2. (a) Soit $M = \dfrac{X_1 + \cdots + X_{200}}{200}$. Majorer la probabilité que M ne soit pas dans $]1400; 1600[$.
   (b) Interpréter concrètement cette majoration.

Exercice 6

On considère un échantillon $(X_1; X_2; \cdots; X_{30})$ de 30 variables aléatoires suivant la loi $\mathcal{B}(20\,;\,0{,}6)$
et $M = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{30}}{30}$ la variable aléatoire moyenne de l'échantillon. Justifier que $p(|M - 12| \geqslant 4) \leqslant 0,01$.

Exercice 7

100 personnes jouent indépendamment à un même jeu dont la variable aléatoire associée au gain (en euros) a pour espérance 10 et pour variance 2. Donner une minoration de la probabilité que la moyenne des gains de ces 100 personnes soit comprise strictement entre 7 euros et 13 euros.

Exercice 8

On considère un échantillon $(X_1; X_2; ; X_{200})$ de variables aléatoires d'espérance μ et $M_k = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_k}{k}$ la variable aléatoire moyenne de l'échantillon $(X_1; X_2; ; X_k)$ pour k entier entre 1 et 200. On donne ci-dessous le nuage de points $(k; M_k)$. Estimer μ.