Dénombrement

Objectifs

- Savoir modéliser une situation de dénombrement.
- Utiliser arbres, formules et raisonnements structurés.
- Distinguer clairement permutation, arrangement et combinaison.

Activité 1 : principe multiplicatif et arbre de choix

Un code est formé de :

- une lettre parmi A, B, C
- puis deux chiffres parmi 1, 2, 3

Question : Combien de codes peut-on former ?

Méthode : principe multiplicatif
Lorsqu'un choix se fait en plusieurs étapes indépendantes :

$$\text{Total} = (\text{choix } 1) \times (\text{choix } 2) \times \cdots$$

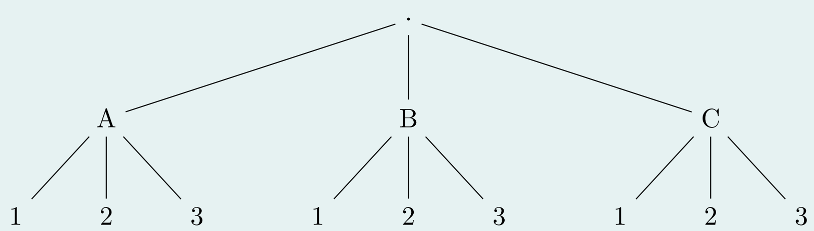
Application :

- 3 choix pour la lettre
- 3 choix pour le premier chiffre
- 3 choix pour le second chiffre

Réponse : Il y a 27 codes possibles. En effet,

$$3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27.$$

Remarque : On ne liste pas tous les cas, on structure le raisonnement.



Activité 2 : permutations

On dispose de 4 élèves : A, B, C, D.

Question : Combien de façons de les organiser en ligne ?

Définition : permutation
Une permutation correspond à un classement de **tous les éléments**. L'ordre est donc important.

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 1$$

Raisonnement :

- 4 choix pour la première place.
- 3 pour la deuxième.
- 2 pour la troisième.
- 1 pour la dernière.

Réponse : 24 permutations. En effet,

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24.$$

Erreur fréquente : oublier que l'ordre change le résultat.

Activité 3 : arrangements

Situation :
On choisit un président et un trésorier parmi 5 personnes.

Question : Combien de choix possibles ?

Définition : arrangement
On choisit p éléments parmi n, et l'ordre compte :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Analyse :

— 5 choix pour président

— 4 choix restants pour trésorier

$$5 \times 4 = 20$$

Réponse : 20 possibilités
Remarque : Ne pas oublier que : $(A, B) \neq (B, A)$.

Activité 4 : combinaisons

Situation :
On choisit 3 élèves parmi 10.

Question : Combien de groupes différents ?

Définition : combinaison
On choisit sans tenir compte de l'ordre :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Méthode :

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1}$$
$$= 120$$

Réponse : 120 groupes
Erreur fréquente : compter plusieurs fois les mêmes groupes.

— *Si les choix sont indépendants, on multiplie les possibilités.*

— $n!$ *sert à organiser tous les éléments.*

— A_n^p *implique l'ordre.*

— $\binom{n}{p}$ *ignore l'ordre.*

Bilan