Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Partie A

On considère la variable aléatoire X donnant le gain à un jeu de grattage dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous.

x_i	0	2	4	6	10	20	100	1 000	25 000
$P(X = x_i)$	0,682	0,1435	0,103	0,0363	0,0225	0,0126	$9,73 \times 10^{-5}$	2×10^{-6}	7×10^{-7}

1. Déterminer $E(X)$.
   ....
   ....
   ....
2. Pour la suite, on prendra $E(X) = 1,423$. Déterminer les probabilités suivantes.
   (a) $P(|X - E(X)| \geqslant 15)$.
   ....
   ....
   ....
   (b) $P(|X - E(X)| \geqslant 100)$.
   ....
   ....
   ....
   (c) $P(|X - E(X)| \geqslant 10000)$.
   ....
   ....
   ....
3. Que semble-t-on pouvoir dire de la probabilité $P(|X - E(X)| \geqslant \delta)$ quand δ devient grand ?
   ....
   ....

Partie B

On admet que la variance de X est $V(X) = 450$ (en réalité, 450 est un arrondi à l'entier).

1. Calculer $\dfrac{V(X)}{\delta^2}$ pour $\delta = 15$, pour $\delta = 100$, puis pour $\delta = 10000$.
   ....
   ....
   ....
2. Comparer $P(|X - E(X)| \geqslant \delta)$ et $\dfrac{V(X)}{\delta^2}$ dans ces trois cas.
   ....
   ....
3. Quelle conjecture peut-on faire sur $P(|X - E(X)| \geqslant \delta)$ et $\dfrac{V(X)}{\delta^2}$?
   ....
   ....

Partie C

1. En utilisant la conjecture de la partie B, montrer que $P\big(|X - E(X)| \geqslant 2\sigma\big) \leqslant \dfrac{1}{4}$.
   ....
   ....
   ....
2. Interpréter le résultat.
   ....
   ....

Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et de variance $V(X)$. Quel que soit le réel $\delta > 0$,
....

Bilan

Exercice 1

Soit A une variable aléatoire telle que $p(A \in]-4;12[) = 0,72$. Déterminer $p(|A-4| \geqslant 8)$.

Exercice 2

Soit B une variable aléatoire telle que $p(|B-8| \geqslant 3) \leqslant 0,36$. Donner une minoration de $p(|B-8| < 3)$.

Exercice 3

Soit C une variable aléatoire telle que $p(|C-4| < 3) > 0,98$. Donner une majoration de $p(|C-4| \geqslant 3)$.

Exercice 4

Soit B une variable aléatoire telle que $p(|B+12| \geqslant 2) \leqslant 0,11$. Donner une minoration de $p(|B+12| < 2)$.

Exercice 5

Soit Z une variable aléatoire tel que $p(Z \in [7;8]) = 0,25$ et $p(Z \in]8;13]) = 0,3$.

1. Déterminer $p(|Z-10| \leqslant 3)$.
2. En déduire $p(|Z-10| > 3)$.

Exercice 6

Soit A une variable aléatoire vérifiant $p(|A-10| < 3) = 0,4$; $p(|A-8| < 1) = 0,15$ et $p(A = 9) = 0$. Déterminer $p(|A-11| < 2)$.

Exercice 7

On considère la variable aléatoire D donnant le débit de la Loire en $m^3.s^{-1}$ à Tours à un instant t. Une étude statistique permet de considérer que $E(D) = 350$ et $V(D) = 28000$.

1. Donner une majoration de $p(|D-350| \geqslant 200)$ puis interpréter cette majoration dans les termes de l'énoncé.
2. Donner une minoration de la probabilité que le débit de la Loire à Tours à l'instant t soit strictement compris entre 50 et 650 $m^3.s^{-1}$.

Exercice 8

Dans un cabinet médical, le nombre de patient(e)s vu(e)s chaque jour par un médecin est donné par une variable aléatoire P d'espérance $E(P) = 32$ et de variance $V(P) = 9$.

1. (a) En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, que peut-on dire de $p(|P-32| < 6)$?
   (b) Interpréter le résultat dans les termes de l'énoncé.
2. Déterminer une majoration de la probabilité que ce médecin voie soit 21 patient(e)s ou moins soit 41 patient(e)s ou plus en une journée.

Exercice 9

On considère que le temps passé quotidiennement sur Internet par Maria (en heures) est donné par une variable aléatoire I d'espérance $E(I) = 2$ et de variance $V(I) = 0,25$. Minorer la probabilité que Maria passe entre 1 et 3 heures (exclues) sur Internet aujourd'hui.

Exercice 10

Dans une population, la taille en cm d'une personne adulte prise au hasard est donnée par une variable aléatoire :

— F, d'espérance 165 et de variance 25 pour une femme ;
— H, d'espérance 180 et de variance 36 pour un homme.

1. (a) Majorer la probabilité $p(|F-165| \geqslant 8)$.
   (b) Majorer la probabilité que la taille d'une femme de cette population soit inférieure ou égale à 157 cm, ou supérieure ou égale à 173 cm.
2. Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à l'événement $|H-180| \geqslant 10$ et l'interpréter dans les termes de l'énoncé.