Maths Expertes
maths-mde.fr

Automatismes

...../10 - 30 minutes

Lycée
Evariste Galois

Question 1 : (1 point)

17 est un nombre premier, donc :

$$x^2 - y^2 = 17 \Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 17$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 17 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x - y = 17 \\ x + y = 1 \end{cases}.$$

Par substitution, on obtient :

$$\begin{cases} x = y + 1 \\ 2y + 1 = 17 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = y + 17 \\ 2y + 17 = 1. \end{cases}$$

Soit,

$$\begin{cases} x = y + 1 \\ y = \dfrac{17-1}{2} = 8 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = y + 17 \\ y = \dfrac{1-17}{2} = -8. \end{cases}$$

Les solutions recherchées étant dans $\mathbb{N}^2$, on en déduit que : $S = \{(9;8)\}$.

Question 2 : (1 point)

Méthode 1 : On sait que :

$$n^3 - n = n(n-1)(n+1)$$

C'est un produit de trois entiers consécutifs, il est donc divisible par 3.
Méthode 2 : Raisonnement par disjonction de cas.
Si $n \equiv 0$ [3] alors $n^3 - n \equiv 0^3 - 0 \equiv 0$ [3].
Si $n \equiv 1$ [3] alors $n^3 - n \equiv 1^3 - 1 \equiv 0$ [3].
Si $n \equiv 2$ [3] alors $n^3 - n \equiv 2^3 - 2 \equiv 6 \equiv 0$ [3].
En conséquence, pour tout entier naturel n, $n^3 - n \equiv 0$ [3], autrement dit, $3 | n^3 - n$.

Question 3 : (1 point)

Méthode 1 : $3 \wedge 5 = 1$ alors d'après le théorème de Gauss, on a :

$$\begin{cases} 3 | y + 3 \\ 5 | x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{N} ; y + 3 = 3k \\ \exists k' \in \mathbb{N} ; x - 2 = 5k' \end{cases}.$$

Par substitution dans l'équation : $3(x-2) = 5(y+3)$ on obtient : $3 \times 5k' = 5 \times 3k$, soit $k = k'$.
Autrement dit, $\begin{cases} y = 3k - 3 \\ x = 5k + 2. \end{cases}$
En conséquence, $S = \{(5k+2, 3k-3), \quad k \in \mathbb{N}^*\}$.
Méthode 2 : On a :

$$3(x-2) = 5(y+3) \Leftrightarrow 3x - 6 = 5y + 15 \Leftrightarrow 3x = 5y + 21.$$

On en déduit alors que :

$$3x \equiv 21 \equiv 1 \ [5].$$

L'inverse de 3 modulo 5 est donc 2. Ainsi, $x \equiv 2$ [5]. Autrement dit, il existe un entier naturel n tel que $x = 5k + 2$. Et par substitution, on obtient : $5y + 21 = 3(5k+2)$, soit $y = 3k - 3$.
En conséquence, $S = \{(5k+2, 3k-3), \quad k \in \mathbb{N}^*\}$.

Question 4 : (1 point)

Méthode 1 : Soit $d = (11n+6) \wedge (9n+5)$. Ainsi, $d | 11n+6$ et $d | 9n+5$.
Et donc d divise toute combinaison linéaire de $11n+6$ et $9n+5$.
Autrement dit, $d | -9(11n+6) + 11(9n+5)$ soit, $d | -99n - 54 + 99n + 5$.
En conséquence $d | 1$ et donc $d = 1$. D'où le résultat.
Méthode 2 : On remarque que :

$$-9(11n+6) + 11(9n+5) = 1.$$

Donc, d'après le théorème de Bézout, on a :

$$(11n+6) \wedge (9n+5) = 1.$$

Question 5 : (1 point)

On a : $100 = 13 \times 7 + 9$ donc $100 \equiv 9$ [13]. De plus, $9^3 = 729$ et $729 \equiv 1$ [13].
Par puissance, on obtient : $(9^3)^{333} \equiv 1$ [13].
Et par produit, on obtient : $(9^3)^{333} \times 9 \equiv 9$ [13], soit $100^{1000} \equiv 9^{1000} \equiv 9$ [13].
En conséquence, 9 est le reste de la division euclidienne 100^{1000} par 13.

Question 6 : (1 point)

On a : $2^3 = 8$ et $8 \equiv 1$ [7]. Ainsi, par puissance on obtient, pour tout entier naturel n, $(2^3)^n \equiv 1$ [7].
En conséquence, pour tout entier naturel n, on a :

$$2^{3n} - 1 \equiv 0 \ [7].$$

Question 7 : (1 point)

$$1665x + 1035y = 45 \quad (E)$$

En utilisant l'algorithme d'Euclide, on obtient :
$1665 = 1035 \times 1 + 630$
$1035 = 630 \times 1 + 405$
$630 = 405 \times 1 + 225$
$405 = 225 \times 1 + 180$
$225 = 180 \times 1 + 45$
$180 = 45 \times 4 + 0$
Ainsi,$1665 \wedge 1035 = 45$. Dès lors,
$45 = 225 - 180 \times 1$
$45 = (630 - 405) - (405 - 225)$
$45 = 630 - 2 \times 405 + 225$
$45 = (1665 - 1035) - 2 \times (1035 - 630) + (630 - 405)$
$45 = 1665 - 3 \times 1035 + 3 \times 630 - 405$
$45 = 1665 - 3 \times 1035 + 3 \times (1665 - 1035) - (1035 - 630)$
$45 = 4 \times 1665 - 7 \times 1035 + 1665 - 1035$
$45 = 5 \times 1665 - 8 \times 1035.$
Ainsi, $(5; -8)$ est solution particulière de l'équation (E). On a alors,

$$\begin{cases} 1665x + 1035y = 45 \\ 5 \times 1665 - 8 \times 1035 = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 37x + 23y = 1 \\ 37 \times 5 - 23 \times 8 = 1. \end{cases}$$

Par soustraction, on obtient :

$$37(x-5) + 23(y+8) = 0 \Leftrightarrow 37(x-5) = -23(y+8). \quad (E')$$

Or, $37 \wedge 23 = 1$. Donc, d'après le théorème de Gauss,

$$\begin{cases} 37 | -(y+8) \\ 23 | x-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z}; -(y+8) = 37k \\ \exists k' \in \mathbb{Z}; x-5 = 23k'. \end{cases}$$

Par substitution dans (E'), on obtient $k = k'$. En conséquence,

$$x = 5 + 23k, \quad y = -8 - 37k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Question 8 : (1 point)

Soit n un entier impair. Il existe alors un entier p, tel que $n = 2p + 1$. De plus,

$$\begin{aligned} n^2 &= (2p+1)^2 \\ &= 4p^2 + 4p + 1 \\ &= 4p(p+1) + 1. \end{aligned}$$

Or, $p(p+1)$ est un nombre pair car c'est le produit de deux nombres consécutifs. Donc, il existe un entier k tel que $p(p+1) = 2k$, soit $n^2 = 8k + 1$. Autrement dit, pour tout entier impair, On a : $n^2 \equiv 1\ [8]$.

Dès lors, si a,b,c sont impairs alors

$$a^2 \equiv b^2 \equiv c^2 \equiv 1\ [8].$$

Ce qui entraine,

$$a^2 + b^2 + c^2 \equiv 3\ [8].$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} (a+b+c)^2 &= (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + 2ab + 2(a+b)c + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc). \end{aligned}$$

Ce qui implique que, $2(ab + ac + bc) = (a+b+c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$.
Par ailleurs, la somme de trois nombres impairs est un nombre impair. Donc,

$$(a+b+c)^2 \equiv 1\ [8].$$

En conséquence, $2(ab + ac + bc) \equiv 1^2 - 3 \equiv -2 \equiv 6\ [8]$.

Question 9 : (1 point)

Posons : $A_n = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$.
A_n est le produit de cinq entiers consécutifs, donc A_n est un multiple de 5. Autrement dit, $A_n \equiv 0[5]$.
A_n contient un produit de trois entiers consécutifs, donc A_n est un multiple de 3. Autrement dit, $A_n \equiv 0[3]$.
Montrons par disjonction de cas que pour tout entier n, on a : $A_n \equiv 0[8]$.
Si $n \equiv 0\ [8]$ alors $A_n \equiv 0\ [8]$.
Si $n \equiv 1\ [8]$ alors $A_n \equiv 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \equiv 0\ [8]$.
Si $n \equiv 2\ [8]$ alors $A_n \equiv 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \equiv 0\ [8]$.
Si $n \equiv 3\ [8]$ alors $A_n \equiv 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \equiv 0\ [8]$.
Si $n \equiv 4\ [8]$ alors $A_n \equiv 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \equiv 0\ [8]$.
Si $n \equiv 5\ [8]$ alors $A_n \equiv 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \equiv 0\ [8]$.
Si $n \equiv 6\ [8]$ alors $A_n \equiv 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \equiv 0\ [8]$.
Si $n \equiv 7\ [8]$ alors $A_n \equiv 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \equiv 0\ [8]$.
D'où le résultat.
Par ailleurs, $120 = 3 \times 5 \times 8$ et 3 ; 5 et 8 sont deux à deux premiers entre eux. En conséquence, $120 \mid A_n$.

Question 10 : (1 point)

On a : $\begin{cases} 3x \equiv 1 \quad [5] \\ 5x \equiv 1 \quad [7] \end{cases}$ donc $\begin{cases} x \equiv 2 \ [5] & \text{car, 2 est l'inverse de 3 modulo 5} \\ x \equiv 3 \ [7] & \text{car, 3 est l'inverse de 5 modulo 7.} \end{cases}$

Autrement dit, $\begin{cases} \exists p \in \mathbb{Z}; \quad x - 2 = 5p \\ \exists p' \in \mathbb{Z}; \quad x - 3 = 7p' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists p \in \mathbb{Z}; \quad x = 2 + 5p \\ \exists p' \in \mathbb{Z}; \quad x = 3 + 7p'. \end{cases}$

Par soustraction, on obtient l'équation : $1 = 5p - 7p'$. $(3; 2)$ est une solution particulière de cette équation. Ainsi,

$$\begin{cases} 5p - 7p' = 1 & L_1 \\ 5 \times 3 - 7 \times 2 = 1 & L_2. \end{cases}$$

$L_1 - L_2 \Rightarrow 5(p - 3) = 7(p' - 2)$. (E)

Or, $5 \wedge 7 = 1$. Donc, d'après le théorème de Gauss,

$$\begin{cases} 5 \mid p' - 2 \\ 7 \mid p - 3 \end{cases} \quad \begin{cases} \exists k' \in \mathbb{Z} \mid & p' - 2 = 5k' \\ \exists k \in \mathbb{Z} \mid & p - 3 = 7k. \end{cases}$$

Par substitution dans l'équation (E), on obtient : $k = k'$. Dès lors

$$\begin{cases} p' = 5k + 2 \\ p = 7k + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5(7k + 3) + 2 \\ x = 7(5k + 2) + 2. \end{cases} \Rightarrow x = 35k + 17 \text{ où } k \in \mathbb{Z}.$$

$S = \{35k + 17; k \in \mathbb{Z}\}$.