Automatismes

Corrigés

Question 1 : (1 point)

Posons : $Z = \dfrac{z+\overline{z}}{z-\overline{z}}$, avec $z \neq \overline{z}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\overline{Z} &= \overline{\left(\frac{z+\overline{z}}{z-\overline{z}}\right)} \\
&= \frac{\overline{z+\overline{z}}}{\overline{z-\overline{z}}} \\
&= \frac{\overline{z}+\overline{\overline{z}}}{\overline{z}-\overline{\overline{z}}} \\
&= \frac{\overline{z}+z}{\overline{z}-z} \quad \text{car, } \ \overline{\overline{z}} = z \\
&= -\frac{\overline{z}+z}{z-\overline{z}} \\
&= -Z.
\end{aligned}$$

En conséquence, Z est un nombre imaginaire pur.

Question 2 : (1 point)

z_1 et z_2 sont les deux racines du trinôme $z^2 + \sqrt{2}z + 1$.
Le discriminant de ce trinôme est égal à : $\Delta = b^2 - 4ac = \sqrt{2}^2 - 4 \times 1 \times 1 = -2$.
Δ étant < 0, ce trinôme admet deux racines complexes :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{2}i}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{2}i}{2}.$$

Question 3 : (1 point)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{\exp(ix) + \exp(-ix)} &= \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{\exp(ix) + \exp(-ix)} \times \frac{\exp(-ix)}{\exp(-ix)} \\
&= \frac{\exp(ix) \times \exp(-ix) - \exp(-ix) \times \exp(-ix)}{\exp(ix) \times \exp(-ix) + \exp(-ix) \times \exp(-ix)} \\
&= \frac{1 - \exp(-2ix)}{1 + \exp(-2ix)} \quad \text{car, } \ \exp(ix)\exp(-ix) = 1 \quad \text{et} \quad \exp(-ix)\exp(-ix) = \exp(-2ix).
\end{aligned}$$

Question 4 : (1 point)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
1 + i + i^2 + \cdots + i^{4n} &= \frac{i^{4n+1} - 1}{i - 1} \\
&= \frac{(i^4)^n \times i - 1}{i - 1} \\
&= \frac{i-1}{i-1}, \quad \text{car, } \ i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

En conséquence, on peut écrire cette somme sous les deux formes suivantes :

$$1+i+i^2+\cdots+i^{4n}=\cos(0)+i\sin(0) \quad \text{et} \quad 1+i+i^2+\cdots+i^{4n-1}=e^{0i}=e^{2\pi i}.$$

Question 5 : (1 point)

Pour tout z dans $\mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} z^2=z\times\overline{z} &\Leftrightarrow z^2-z\times\overline{z} \\ &\Leftrightarrow z\left(z-\overline{z}\right) \\ &\Leftrightarrow z=0 \text{ ou } z-\overline{z}=0 \\ &\Leftrightarrow z=0 \text{ ou } z=\overline{z}. \end{aligned}$$

Ainsi, $S=\{0\}\cup\mathbb{R}=\mathbb{R}$.

Question 6 : (1 point)

Calculons d'abord le module de $z=\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

$$\begin{aligned} |z| &= \left|\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right| \\ &= \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{12}{4}} \\ &= \sqrt{3}. \end{aligned}$$

En factorisant par le module $\sqrt{3}$, on obtient :

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right) \\ z &= \sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right). \end{aligned}$$

En conséquence, $-\dfrac{\pi}{6}$ est un argument de $\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

Question 7 : (1 point)

L'ensemble de points M d'affixe z du plan complexe vérifiant $|z+2i|=|z+5-i|$, est la médiatrice du segment $[AB]$, avec A et B les deux points d'affixe respective $-2i$ et $-5+i$. On peut déterminer une équation cartésienne de cette droite, en notant $z=x+iy$,

$$\begin{aligned} |z+2i|=|z+5-i| &\Leftrightarrow |x+iy+2i|=|x+iy+5-i| \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y+2)^2}=\sqrt{(x+5)^2+(y-1)^2} \\ &\Leftrightarrow x^2+(y+2)^2=(x+5)^2+(y-1)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2+y^2+4y+4=x^2+10x+25+y^2-2y+1 \\ &\Leftrightarrow 6y-10x-22=0. \quad (*) \end{aligned}$$

(*) est une équation cartésienne de la droite (AB).

Question 8 : (1 point)

L'ensemble de points M d'affixe z du plan complexe vérifiant $|z-1+5i| = 2$, est le cercle de centre C d'affixe $1-5i$ et de rayon $\sqrt{3}$. En effet, en posant $z = x+iy$, on obtient l'équation du cercle :

$$\begin{aligned} |z-1+5i| = 2 \quad &\Leftrightarrow \quad |x+yi-1+5i| = 3 \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{(x-1)^2+(y+5)^2} = 3. \end{aligned}$$

Question 9 : (1 point)

En utilisant la formule du binôme de Newton $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ et la formule d'Euler $\sin(x) = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \sin^3(x) &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 \\ &= \frac{e^{3ix}-3e^{2ix}e^{-ix}+3e^{ix}e^{-2ix}-e^{-3ix}}{-8i} \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{-2i}+3\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[-\sin(3x)+3\sin(x)\right] \\ &= -\frac{1}{4}\sin(3x)+\frac{3}{4}\sin(x). \end{aligned}$$

Question 10 : (1 point)

On a d'une part :

$$\begin{aligned} 1+i &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)i\right) \\ &= \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}. \end{aligned}$$

Et, d'autre part :

$$\begin{aligned} i-\sqrt{3} &= 2\left(\frac{1}{2}i-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)i\right) \\ &= 2e^{\frac{5\pi}{6}i}. \end{aligned}$$

En conséquence,

$$\begin{aligned} \frac{(1+i)^{2000}}{(i-\sqrt{3})^{1000}} &= \frac{\left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^{2000}}{\left(2e^{\frac{5\pi}{6}i}\right)^{1000}} \\ &= \frac{\sqrt{2}^{2000}}{2^{1000}} \times \frac{\left(e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^{2000}}{\left(e^{\frac{5\pi}{6}i}\right)^{1000}} \\ &= \frac{e^{500\pi}}{e^{\frac{5000\pi}{6}i}} \quad \text{car,} \quad \sqrt{2}^{2000} = 2^{1000}. \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\frac{(1+i)^{2000}}{(i-\sqrt{3})^{1000}} &= \frac{1}{e^{832\pi i+\frac{4\pi}{3}i}} \quad \text{car,} \quad 5000 = 2\times 2500 = 2\times(832\times 3+4) \text{ et } e^{832\pi} = 1 \\
&= \frac{1}{e^{\frac{4\pi}{3}i}} \\
&= e^{-\frac{4\pi}{3}i} \\
&= \cos\left(-\tfrac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\tfrac{4\pi}{3}\right) \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.
\end{aligned}$$