Exercice 1 :

On définit la suite de nombres complexes (z_n) par : $z_0 = 0$, et pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = 3iz_n - 1$.
On se place dans un plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. Pour tout entier naturel n, on note M_n le point du plan d'affixe z_n.

1 Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z = 3iz - 1$.

$$\begin{aligned} z = 3iz - 1 &\Leftrightarrow z(1-3i) = -1 \\ &\Leftrightarrow z = \frac{-1}{1-3i} \\ &\Leftrightarrow z = \frac{-1(1+3i)}{1^2-(3i)^2} \\ &\Leftrightarrow z = \frac{-1-3i}{10}. \end{aligned}$$

Ainsi, $S = \left\{-\frac{1}{10} - \frac{3}{10}i\right\}$. On note A le point dont l'affixe est la solution de cette équation.

2 On définit, pour tout entier naturel n, la suite (u_n) par $u_n = z_n + \frac{1}{10} + \frac{3}{10}i$.

(a) Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= z_{n+1} + \frac{1}{10} + \frac{3}{10}i \\ &= 3iz_n - 1 + \frac{1}{10} + \frac{3}{10}i \\ &= 3iz_n - \frac{9}{10} + \frac{3}{10}i \\ &= 3i\left(z_n + i\frac{3}{10} + \frac{1}{10}\right) \\ &= 3iu_n. \end{aligned}$$

(b) Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned} u_n &= 3iu_{n-1} \\ u_{n-1} &= 3iu_{n-2} \\ \vdots &= \vdots \\ u_2 &= 3iu_1 \\ u_1 &= 3iu_0. \end{aligned}$$

En multipliant membre à membre les égalités, on obtient :
$u_n \times u_{n-1} \times \cdots \times u_2 \times u_1 = (3i)^n \times u_{n-1} \times u_{n-1} \times \cdots \times u_1 \times u_0$.
Ainsi, $u_n = (3i)^n u_0 = \left(\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i\right) \times 3^n \times i^n$.
(u_n) est alors une suite géométrique de raison $3i$ et de terme initial $\frac{1}{10} + \frac{3}{10}$.

3 (a) Calculons la distance AM_n :

$$\begin{aligned} AM_n &= |z_n - z_A| \\ &= \left|(3i)^n u_0 - \left(\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i\right) - \left(-\frac{1}{10} - \frac{3}{10}i\right)\right| \\ &= |(3i)^n u_0| \\ &= |(3i)^n||u_0| \\ &= |3i|^n |u_0| \\ &= |u_0| 3^n. \end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$. Ainsi, AM_n diverge vers $+\infty$.

(b) Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{z_{n+2} - z_A}{z_n - z_A}\right) &= \arg\left(\frac{(3i)^{n+2}u_0 - \left(\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i\right) - \left(-\frac{1}{10} - \frac{3}{10}i\right)}{(3i)^n u_0 - \left(\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i\right) - \left(-\frac{1}{10} - \frac{3}{10}i\right)}\right) \\ &= \arg\left(\frac{(3i)^{n+2}u_0}{(3i)^n u_0}\right) \\ &= \arg\left((3i)^2\right) \\ &= \arg(-9) \\ &= \pi + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ainsi, les points A, M_n et M_{n+2} sont alignés.

(c) Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{z_{n+2} - z_A}{z_n - z_A}\right) &= \arg\left(\frac{(3i)^{n+1}u_0 - \left(\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i\right) - \left(-\frac{1}{10} - \frac{3}{10}i\right)}{(3i)^n u_0 - \left(\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i\right) - \left(-\frac{1}{10} - \frac{3}{10}i\right)}\right) \\ &= \arg\left(\frac{(3i)^{n+1}u_0}{(3i)^n u_0}\right) \\ &= \arg(3i) \\ &= \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ainsi, les droites (AM_n) et (AM_{n+1}) sont perpendiculaires.

Exercice 2 :

On appelle ensemble des entiers de Gauss noté $\mathbb{Z}[i]$ l'ensemble des nombres complexes qui s'écrivent $a+ib$, avec a et $b \in \mathbb{Z}$.

1 Soit $z = a+ib$ et $z' = a'+ib' \in \mathbb{Z}[i]$. Or, $a-a'$ et $b-b' \in \mathbb{Z}$ et $aa-bb'$ et $ab'+a'b \in \mathbb{Z}$. Ainsi,

$$z - z' = (a-a') + i(b-b') \in \mathbb{Z}[i]$$

et

$$zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b) \in \mathbb{Z}[i].$$

2 Pour tout nombre complexe z, on note $N(z) = z\bar{z}$.

(a) On remarque que $N(z) = |z|^2$. Puisque $|zz'| = |z| \cdot |z'|$, en mettant au carré cette égalité, on a le résultat demandé.

(b) Si $z = a+ib$, alors $N(z) = a^2+b^2$ et a^2, b^2 sont des entiers naturels, donc $N(z)$ aussi.

(c) Soit z un entier de Gauss tel que $1/z$ est un entier de Gauss. Posons $z' = 1/z$. Alors on sait que $zz' = 1$ et donc $N(z) \times N(z') = 1$. Or le produit de deux entiers naturels est égal à 1 si et seulement si ces deux entiers sont égaux à 1. Donc $N(z) = 1$.

(d) Soit $z = a + ib \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $1/z \in \mathbb{Z}[i]$. Alors $N(z) = 1$, et donc $a^2 + b^2 = 1$. Or, puisque a^2 et b^2 sont des entiers naturels, ceci n'est possible que dans quatre cas : $(a,b) = (1,0)$, $(a,b) = (-1,0)$, $(a,b) = (0,1)$, et $(a,b) = (0,-1)$. Réciproquement, il est facile de vérifier que 1, -1, i et $-i$ sont éléments de $\mathbb{Z}[i]$, et sont tels que $1/z \in \mathbb{Z}[i]$, puisque respectivement on a $1/z = 1$, -1, $-i$ et i. Les éléments de $\mathbb{Z}[i]$ tels que $1/z \in \mathbb{Z}[i]$ sont donc 1, -1, i et $-i$.

Exercice 3 :

On se propose dans cet exercice de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

- $\forall z \in \mathbb{R},\ f(z) = z$.
- $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2,\ f(z+z') = f(z) + f(z')$.
- $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2,\ f(z \times z') = f(z) \times f(z')$.

$\boxed{1}$ Pour $f(z) = z$, il n'y a rien à faire. Pour $f(z) = \bar{z}$, ceci vient des propriétés du cours sur le conjugué d'un nombre complexe.

$\boxed{2}$ Réciproquement soit f une fonction du problème.

(a) Utilisons la troisième propriété sur $z = z' = i$. On a

$$f(i \times i) = f(i) \times f(i) = \big(f(i)\big)^2.$$

Mais on a $i \times i = -1$ et d'après la propriété (a), $f(-1) = -1$. On a donc

$$\big(f(i)\big)^2 = -1.$$

Or, les solutions de l'équation $z^2 = -1$ sont $z = i$ et $z = -i$. Donc $f(i) = i$ ou $f(i) = -i$.

(b) Soit $z \in \mathbb{C}$. Écrivons le $z = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. On a alors

$$\begin{aligned} f(z) &= f(a+ib) \\ &= f(a) + f(ib) \\ &= f(a) + f(i)f(b) \\ &= a + ib \\ &= z. \end{aligned}$$

On a donc démontré que $f(z) = z$ pour tout nombre complexe z.

(c) On procède de la même façon. Soit $z \in \mathbb{C}$ qu'on écrit $z = a + ib$. On a

$$\begin{aligned} f(z) &= f(a+ib) \\ &= f(a) + f(ib) \\ &= f(a) + f(i)f(b) \\ &= a - ib \\ &= \bar{z}. \end{aligned}$$

On a donc démontré que $f(z) = \bar{z}$ pour tout nombre complexe z.

$\boxed{3}$ Dans cet exercice, on a démontré que les fonctions solutions du problème sont exactement les fonctions définies par $f(z) = z$ et $f(z) = \bar{z}$.

Exercice 4 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. Dans ce qui suit, z désigne un nombre complexe.
Pour chacune des affirmations suivantes ci-dessous, indiquer si elle est vraie ou si elle est fausse. Justifier.

1. $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ n'est pas la solution de cette équation $z-i=i(z+1)$. En effet,

$$\begin{aligned} z-i=i(z+1) &\Leftrightarrow z(1-i)=i+1 \\ &\Leftrightarrow z=\frac{i+1}{1-i} \\ &\Leftrightarrow z=\frac{(i+1)^2}{1^2-i^2} \\ &\Leftrightarrow z=\frac{i^2+2i+1}{1^2-i^2} \\ &\Leftrightarrow z=i. \end{aligned}$$

Et, $i\neq i+1$, soit $i\neq\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

2. Soit $x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$\begin{aligned} 1+e^{2ix} &= e^{ix}(e^{-ix}+e^{ix}) \\ &= 2e^{ix}\frac{e^{-ix}+e^{ix}}{2} \\ &= 2\cos(x)e^{ix}. \end{aligned}$$

Ainsi, cette affirmation $1+e^{2i\pi}=2\cos(x)e^{-ix}$ est fausse.

3. Posons $z=x+iy$. On a alors :

$$\begin{aligned} |z-i|=|z+1| &\Leftrightarrow |x+(y-1)i|=|x+1+yi| \\ &\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=(x+1)^2+y^2 \\ &\Leftrightarrow x^2+y^2-2y+1=x^2+2x+1+y^2 \\ &\Leftrightarrow y=-x. \end{aligned}$$

Ainsi, un point M d'affixe z vérifiant $|z-i|=|z+1|$ appartient bel et bien à la droite d'équation $y=-x$.

4. Supposons que cette équation $z^5+z-i+1=0$ admet une solution réelle r. Cela revient à dire que $r^5+r-i+1=0\Leftrightarrow r^5+r+1=i$.

Cette dernière égalité est complètement absurde, car $r^5+r+1\in\mathbb{R}$. Par conséquent, cette affirmation est fausse.

Exercice 5 :

Soit r un nombre strictement positif et α un réel. Soit a un nombre complexe $ae^{i\alpha}$ et n un entier naturel non nul.
L'objectif est de résoudre dans $\mathbb{C}$ des équations de la forme $z^n=a$. Les solutions de cette équation sont appelées racines n-ièmes de a.

1. Pour $n=1$, $S=\{a\}$.

2. (a) $(1+2i)^2=(2i)^2+2\times 2i\times 1+1^2=-4+4i+1=-3+4i$.

(b) Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation, $z^2 = -3+4i$.

$$\begin{array}{rcl} z^2 = -3+4i & \Leftrightarrow & z^2 = (1+2i)^2 \\ & \Leftrightarrow & z^2 - (1+2i)^2 = 0 \\ & \Leftrightarrow & (z-1-2i)(z+1+2i) = 0 \\ & \Leftrightarrow & z-1-2i = 0 \quad \text{ou} \quad z+1+2i = 0 \\ & \Leftrightarrow & z = 1+2i \quad \text{ou} \quad z = -1-2i. \end{array}$$

Ainsi, $S = \{1+2i; -1-2i\}$.

$\boxed{3}$ (a) La forme exponentielle est donnée par :

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{2}+i\sqrt{2} & = & 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) \\ & = & 2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right) \\ & = & 2e^{\frac{\pi}{4}i}. \end{array}$$

(b) $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ est une solution de $z^3 = -4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i$. En effet,

$$\begin{array}{rcl} (\sqrt{2}+i\sqrt{2})^3 & = & \sqrt{2}^3+3\sqrt{2}\times(i\sqrt{2})^2+3\sqrt{2}^2\times(\sqrt{2}i)+(\sqrt{2}i)^3 \\ & = & 2\sqrt{2}-6\sqrt{2}+6\sqrt{2}i-2\sqrt{2}i \\ & = & -4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i. \end{array}$$

(c) La forme exponentielle est donnée par :

$$\begin{array}{rcl} (\sqrt{2}+i\sqrt{2})^3 & = & 8\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) \\ & = & 8\left(\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\right) \\ & = & 8e^{\frac{3\pi}{4}i}. \end{array}$$

(d) Résoudre $z^3 = -4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i$ revient à résoudre $Z^3 = 1$ avec $Z = \dfrac{z}{2e^{\frac{\pi}{4}i}}$. En effet,

$$\begin{array}{rcl} Z^3 = 1 & \Leftrightarrow & \left(\dfrac{z}{2e^{\frac{\pi}{4}i}}\right)^3 = 1 \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{z^3}{2^3e^{\frac{3\pi}{4}i}} = 1 \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{z^3}{8\left(\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\right)} = 1 \\ & \Leftrightarrow & z^3 = -4\sqrt{2}+4\sqrt{2}i. \end{array}$$

(e) D'après la question précédente, on a :

$$\begin{array}{rcl} Z^3 = 1 & \Leftrightarrow & Z = e^{\frac{2k\pi}{3}i}, \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ & \Leftrightarrow & \dfrac{z}{2e^{\frac{\pi}{4}i}} = e^{\frac{2k\pi}{3}i}, \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ & \Leftrightarrow & z = 2e^{\frac{\pi}{4}i}e^{\frac{2k\pi}{3}i}, \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ & \Leftrightarrow & z = 2e^{\frac{\pi}{4}i+\frac{2k\pi}{3}i}, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

Ainsi, $S = \left\{2e^{\frac{\pi}{4}i+\frac{2k\pi}{3}i}, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$.

$\boxed{4}$ En reprenant la méthode précédente, déterminer les racines 2-ièmes de i (également appelées racines carrées de i).

On peut montrer que : $\dfrac{1}{2}(1+i)^2 = i$. Et utiliser les mêmes astuces que précédemment pour déduire l'ensemble des solutions.

Exercice 6 :

On commence par écrire $1+i\sqrt{3}$ sous forme exponentielle :

$$1+i\sqrt{3}=2e^{i\pi/3}.$$

En prenant la puissance n-ième, on trouve

$$(1+i\sqrt{3})^n=2^n e^{in\pi/3}.$$

Ceci est un réel positif si et seulement si $\sin(n\pi/3)=0$ et $\cos(n\pi/3)\geq 0$. Or, $\sin(n\pi/3)=0$ si et seulement si $n=3k$, $k\in\mathbb{Z}$. Mais, pour ces valeurs de n, on a $\cos(n\pi/3)=\cos(k\pi)$, et ceci est positif si et seulement si k est pair. Ainsi, les entiers qui conviennent sont les multiples de 6.

Exercice 7 :

Soit $z=re^{i\theta}$ avec $r>0$ et $\theta\in\mathbb{R}$. Soit n un entier naturel non nul.
On a $z^2=r^2e^{2i\theta}$. Le module de z^2 est r^2, un argument de z^2 est 2θ.
On a $\bar{z}=re^{-i\theta}$. Le module de $\bar{z}$ est r, un argument de $\bar{z}$ est $-\theta$.
On a $\frac{1}{z}=\frac{1}{r}e^{-i\theta}$. Le module de $\frac{1}{z}$ est $\frac{1}{r}$, un argument de $\frac{1}{z}$ est $-\theta$.
On a $-z=e^{i\pi}re^{i\theta}=re^{i(\theta+\pi)}$. Le module de $-z$ est r, un argument de $-z$ est $\theta+\pi$.
On a $z^n=r^ne^{in\theta}$. Le module de z^n est r^n, un argument de z^n est $n\theta$.