Nombres complexes
Point de vue géométrique

Évarite Galois
maths-mde.fr

Exercice 1 :

On définit la suite de nombres complexes (z_n) par : $z_0 = 0$, et pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = 3iz_n - 1$.
On se place dans un plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Pour tout entier naturel n, on note M_n le point du plan d'affixe z_n.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z = 3iz - 1$. On note A le point dont l'affixe est la solution de cette équation.

2. On définit, pour tout entier naturel n, la suite (u_n) par $u_n = z_n + \frac{1}{10} + \frac{3}{10}i$.

   (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 3i \times u_n$.

   (b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = \left(\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i\right) \times 3^n \times i^n$.

3. (a) Démontrer que la distance AM_n diverge vers $+\infty$.

   (b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, A, M_n et M_{n+2} sont alignés.

   (c) Démontrer que, pour tout entier naturel n, les droites (AM_n) et (AM_{n+1}) sont perpendiculaires.

Exercice 2 :

On appelle ensemble des entiers de Gauss noté $\mathbb{Z}[i]$ l'ensemble des nombres complexes qui s'écrivent $a + ib$, avec a et $b \in \mathbb{Z}$.

1. Soit z et z' deux entiers de Gauss. Démontrer que $z - z'$ et zz' sont des entiers de Gauss.

2. Pour tout nombre complexe z, on note $N(z) = z\bar{z}$.

   (a) Démontrer que, pour tous nombres complexes z et z', $N(z)N(z') = N(zz')$.

   (b) Démontrer que, pour tout entier de Gauss z, $N(z)$ est un entier naturel.

   (c) Soit z un entier de Gauss non nul tel que $1/z$ est un entier de Gauss, alors $N(z) = 1$.

   (d) Déterminer l'ensemble des entiers de Gauss tels que $1/z$ est un entier de Gauss.

Exercice 3 :

On se propose dans cet exercice de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

- $\forall z \in \mathbb{R},\ f(z) = z$.
- $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ f(z + z') = f(z) + f(z')$.
- $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ f(z \times z') = f(z) \times f(z')$.

1. Vérifier que les fonctions définies par $f(z) = z$ et $f(z) = \bar{z}$ sont solutions du problème.

2. Réciproquement soit f une fonction du problème.

(a) Démontrer que $f(i) = i$ ou $f(i) = -i$.

(b) On suppose que $f(i) = i$. Démontrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = z$.

(c) On suppose que $f(i) = -i$. Démontrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$.

Exercice 4 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Dans ce qui suit, z désigne un nombre complexe.
Pour chacune des affirmations suivantes ci-dessous, indiquer si elle est vraie ou si elle est fausse. Justifier.

1. L'équation $z - i = i(z+1)$ a pour solution $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.
2. Pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, le nombre complexe $1 + e^{2ix}$ admet pour forme exponentielle $2\cos(x)e^{-ix}$.
3. Un point M d'affixe z tel que $|z - i| = |z+1|$ appartient à la droite d'équation $y = -x$.
4. L'équation $z^5 + z - i + 1 = 0$ admet une solution réelle.

Exercice 5 :

Soit r un nombre strictement positif et α un réel. Soit a le nombre complexe $ae^{i\alpha}$ et n un entier naturel non nul.
L'objectif est de résoudre dans $\mathbb{C}$ des équations de la forme $z^n = a$. Les solutions de cette équation sont appelées racines n-ièmes de a.

1. Résoudre l'équation pour $n = 1$.
2. (a) Démontrer que $-3 + 4i = (1+2i)^2$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^2 = -3 + 4i$.
3. (a) Déterminer une forme exponentielle de $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$.
   (b) Justifier que $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ est une solution de $z^3 = -4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$.
   (c) Déterminer une forme exponentielle de $-4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$.
   (d) Justifier que résoudre $z^3 = -4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$ revient à résoudre $Z^3 = 1$ avec $Z = \dfrac{z}{2e^{\frac{\pi}{4}i}}$.
   (e) En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^3 = -4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$.
4. En reprenant la méthode précédente, déterminer les racines 2-ièmes de i (également appelées racines carrées de i).

Exercice 6 :

Trouver les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $(1 + i\sqrt{3})^n$ soit un réel positif.

Exercice 7 :

Soit $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Soit n un entier naturel non nul. Donner le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$z^2,\ \bar{z},\ \frac{1}{z},\ -z,\ z^n.$$