Nombres complexes
Point de vue algébrique

Exercice 1 :

On s'intéresse au cas de l'équation $z^2+z+1=0$ d'inconnue complexe z.

1 Le discriminant du polynôme x^2+x+1 est $1^2-4\times1\times1=-3$. Celui-ci étant négatif, le polynôme n'admet pas de racine réelle.

Soit $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2 D'une part,

$$j^2=\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{i\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

D'autre part,

$$\frac{1}{j}=\frac{1}{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}}=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}=\bar{j}.$$

Par conséquent, $j^2=\frac{1}{j}=\bar{j}$.

3 On sait d'après la question précédente que,

$$j^2=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

Ainsi,

$$j^2+j+1=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}+\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)+1=0.$$

j est donc bien une solution de l'équation $z^2+z+1=0$.

4 On a, $(z-j)(z-a)=z^2-zj-zj+aj=z^2-(a+j)z+aj=a^2+a+1$.
En identifiant les coefficients, on a donc $a+j=-1$ et donc $a=-1-j$.

Or, $j^2+j+1=0$, donc $j^2=-j-1$. Ainsi, $a=j^2=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$.

Par ailleurs, $aj=1$. En effet, en utilisant une identité remarquable, on obtient :

$$aj=\left(-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1.$$

Par conséquent, pour tout complexe z, $z^2+z+1=(z-j)(z-a)$ vaut 0 en $j=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$ et en $a=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$. Ce sont donc les deux racines du polynôme.

Exercice 2 :

Soit x un réel et $z = 2x+1+i(x^2+5x-4)$

$\boxed{1}$ z est imaginaire pur si sa partie réelle est nulle, c'est-à-dire $2x+1=0$ et donc $x=\frac{1}{2}$. Dans ce cas,

$$z = \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 5\times\left(-\frac{1}{2}\right) - 4\right)i = \left(\frac{1}{4}-\frac{5}{2}-4\right)i = -\frac{25i}{4}.$$

$\boxed{2}$ z est réel si sa partie imaginaire est nulle, c'est-à-dire $x^2+5x-4=0$.
Le discriminant de cette équation est égal à 41, en effet $\triangle = 5^2-4\times 1\times(-4) = 41$.
Celui-ci étant supérieur à 0, l'équation admet deux solutions dans $\mathbb{R}$: $-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{41}}{2}$ et $-\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{41}}{2}$.
Dans le premier cas, on a alors $z=-4-\sqrt{41}$.
Dans le second cas, on a $z=-4+\sqrt{41}$.

Exercice 3 :

On remarque que $10-8i = 2(5-4i)$, cela veut dire que, $z = 2(1-3i)(5+4i)(1+3i)(5-4i)$.
Ainsi, en utilisant les formules sur le produit de conjugués, on obtient :

$$\overline{z} = \overline{2(1-3i)(5+4i)(1+3i)(5-4i)} = \overline{2}\times\overline{(1-3i)}\times\overline{(5+4i)}\times\overline{(1+3i)}\times\overline{(5-4i)}.$$

Autrement dit,

$$\overline{z} = 2(1+3i)(5-4i)(1-3i)(5+4i) = z.$$

On en conclut que z est bel et bien réel.

Exercice 4 :

On sait que $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$.
Ainsi, $\overline{\frac{1}{z}+\frac{1}{\overline{z}}} = \overline{\frac{1}{z}}+\overline{\frac{1}{\overline{z}}} = \frac{1}{\overline{z}}+\frac{1}{\overline{\overline{z}}} = \frac{1}{\overline{z}}+\frac{1}{z}$.
Or, $Z=\overline{Z}$ implique que $Z+\overline{Z}$ est réel. Par conséquent, $\frac{1}{z}+\frac{1}{\overline{z}}$ est bel et bien un réel.

Exercice 5 :

Soit $z = a+ib\in\mathbb{C}$,
$2z+3 = 3\overline{z}+4-i \Leftrightarrow 2(a+ib)+3 = 3(a-ib)+4-i \Leftrightarrow 2a-3a+3-4+i(2b+3b+1)=0 \Leftrightarrow -a-1+i(5b+1)=0$.
Ce qui nous amène à résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcl} -a-1 & = & 0 \\ 5b+1 & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow a=-1$ et $b=-\frac{1}{5}$.
La solution de cette équation est donc $-1-\frac{i}{5}$.
Soit $z=a+ib\in\mathbb{C}$,
$2z-4\overline{z} = 6-3i \Leftrightarrow 2(a+ib)-4(a-ib) = 6-3i \Leftrightarrow 2a-4a-6+i(2b+4b+3)=0 \Leftrightarrow -2a-6+i(6b+3)=0$.

Ce qui nous amène à résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcl} -2a-6 & = & 0 \\ 6b+3 & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow a=-3$ et $b=-\frac{1}{2}$.
La solution de cette équation est donc $-3-\frac{i}{2}$.

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$,
$z + \bar{z} = 3 + 4i \Leftrightarrow a + ib + a - ib = 3 + 4i \Leftrightarrow 2a - 3 - 4i = 0$.
Or, la partie imaginaire du membre de gauche est non nulle.
Cette équation n'admet aucune solution.

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$,
$2z + 4 + i = (3 + i)\bar{z} + 2 - 3i \Leftrightarrow 2(a + ib) + 4 + i = (3 + i)(a - ib) + 2 - 3i \Leftrightarrow 2a + 2ib + i + 4 = 3a - 3ib + ia + b + 2 - 3i$.
$\Leftrightarrow 2a - 3a - b - 2 + 4 + i(2b + 1 + 3b - a + 3) \Leftrightarrow -a - b + 2 + i(-a + 5b + 4) = 0$.
Ce qui nous amène à résoudre le système (E) : $\left\{\begin{array}{rcl} -a - b + 2 & = & 0 \\ -a + 5b + 4 & = & 0 \end{array}\right.$.

$(E) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -a - b + 2 & = & 0 \\ b & = & -\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

$(E) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -a - \left(-\dfrac{1}{3}\right) + 2 & = & 0 \\ b & = & -\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

$(E) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & \dfrac{7}{3} \\ b & = & -\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

Par conséquent, la solution de cette équation est $\dfrac{7}{3} - \dfrac{i}{3}$.

Exercice 6 :

Posons $z = a + ib \in \mathbb{C}$, ainsi :

$$\begin{aligned} z^2 - \bar{z} + 1 = 0 & \Leftrightarrow (a + ib)^2 - (a - ib) + 1 = 0 \\ & \Leftrightarrow a^2 + 2aib - b^2 - a + ib + 1 = 0 \\ & \Leftrightarrow a^2 - b^2 - a + 1 + ib(2a + 1) = 0. \end{aligned}$$

Ce qui nous amène à résoudre le système :
$\left\{\begin{array}{rcl} a^2 - b^2 - a + 1 & = & 0 \\ b(2a + 1) & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a^2 - b^2 - a + 1 & = & 0 \\ b = 0 & \text{ou} & 2a + 1 = 0 \end{array}\right.$
Dans le cas où $b = 0$, la première équation devient alors $a^2 - a + 1 = 0$. C'est un polynôme du second degré dont le discriminant vaut -3. Il ne possède donc pas de racine réelle.
Dans le cas où $a = -\dfrac{1}{2}$, la première équation devient alors $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2} + 1 = b^2$ soit $b^2 = \dfrac{7}{4}$ ce qui entraine $b = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$ ou $b = -\dfrac{\sqrt{7}}{2}$.
Les solutions sont donc $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{7}}{2}$ et $-\dfrac{1}{2} - \dfrac{i\sqrt{7}}{2}$.
Idem pour la seconde équation.

Exercice 7 :

On considère la fonction f définie pour tout z dans $\mathbb{C}$ par $f(z) = z^2 + 2z + 9$.

1. $f(a + ib) = (a + ib)^2 + 2(a + ib) + 9 = a^2 + 2aib + (ib)^2 + 2a + 2ib + 9 = a^2 - b^2 + 2a + i \times 2b(a + 1)$.

2. $f(a + ib)$ est réel si sa partie imaginaire, c'est-à-dire $2b(a + 1)$ vaut 0. Ainsi, $f(z)$ est réel si et seulement si z est réel ou $Re(z) = -1$

Exercice 8 :

Pour tout complexe z différent de 1, on pose $f(z)=\dfrac{2-iz}{1-z}$.

1. Supposons qu'il existe un complexe z différent de 1 tel que $\dfrac{2-iz}{1-z}=i$.

   On a alors $2-iz=i(1-z)$ et donc $2-iz=i-iz$ et finalement $2=i$.

   C'est absurde ! Ainsi, pour tout complexe z différent de 1, $f(z)$ est différent de i.

2. Soit Z un complexe différent de i et z un complexe différent de 1.

   $f(z)=Z\Leftrightarrow\dfrac{2-iz}{1-z}=Z\Leftrightarrow 2-iz=Z(1-z)\Leftrightarrow zZ-iz=Z-2\Leftrightarrow z(Z-i)=Z-2\Leftrightarrow z=\dfrac{Z-2}{Z-i}$.

Exercice 9 :

On considère la suite (z_n) définie par $z_0=1$ et, pour tout entier naturel n, $z_{n+1}=\dfrac{z_n-6}{1+i}$.

1. $z_1=\dfrac{1-6}{1+i}=\dfrac{-5(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{-5+5i}{1^2-i^2}=-\dfrac{5}{2}+\dfrac{5i}{2}$.

   $$z_2=\frac{-\frac{5}{2}+\frac{5i}{2}+1}{1+i}=\frac{\left(-\frac{3}{2}+\frac{5i}{2}\right)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{3}{2}+\frac{3i}{2}+\frac{5i}{2}+\frac{5}{2}\right)=\frac{1+4i}{2}$$

2. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n=z_n-6i$.

   (a)

   $$u_{n+1}=z_{n+1}-6i=\frac{z_n-6}{1+i}-6i=\frac{z_n-6-6i(1+i)}{1+i}=\frac{z_n-6-6i+6}{1+i}=\frac{z_n-6i}{1+i}=\frac{u_n}{1+i}$$

   La suite (u_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{1+i}$.

   (b) On sait que $u_0=z_0-6i=1-6i$. Pour tout entier naturel n, on a donc $u_n=\dfrac{1-6i}{(1+i)^n}$ et donc $z_n=u_n+6i=\dfrac{1-6i}{(1+i)^n}+6i$

3. On considère la suite (t_n) définie par $t_0=1$ et, pour tout entier naturel n, $t_{n+1}=\dfrac{t_n-6}{1-i}$.

   (a) Initialisation : On a $t_0=1$ et $z_0=1$. Ainsi, $t_0=\overline{z_0}$. $P(0)$ est vraie.
   Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. On a donc $t_n=\overline{z_n}$. Or,

   $$t_{n+1}=\frac{t_n-6}{1-i}=\frac{\overline{z_n}-6}{1-i}=\frac{\overline{z_n-6}}{\overline{1+i}}=\overline{\left(\frac{z_n-6}{1+i}\right)}=\overline{z_{n+1}}$$

   Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.
   Conclusion : $P(0)$ est vraie et P est héréditaire. Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

   (b)

   $$t_n=\overline{z_n}=\overline{\frac{1-6i}{(1+i)^n}+6i}=\frac{1+6i}{(1-i)^n}-6i.$$

Exercice 10 :

On considère la fonction $f : z \mapsto \dfrac{z-i}{z+i}$, définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$.

1. $f(1+2i) = \dfrac{1+2i-i}{1+2i+i} = \dfrac{3i-1}{1+3i} = \dfrac{(3i-1)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \dfrac{3i+9-1+3i}{1^2-(3i)^2} = \dfrac{8}{10} + \dfrac{6i}{10} = \dfrac{4}{5} + \dfrac{3i}{5}$.

2. Supposons qu'il existe un complexe z différent de $-i$ tel que $f(z) = 1$.
On a alors $\dfrac{z-i}{z+i} = 1$ et donc $z - i = z + i$ et finalement $2i = 0$, ce qui est absurde. Ainsi, pour tout complexe $z \neq -i$, $f(z) \neq 1$.

3. Soit Z un complexe différent de 1 et z un complexe différent de $-i$,

$$f(z) = Z \Leftrightarrow \frac{z-i}{z+i} = Z \Leftrightarrow z - i = Z(z+i) \Leftrightarrow z - zZ = i + Zi \Leftrightarrow z(1-Z) = i + Zi \Leftrightarrow z = \frac{i(1+Z)}{1-Z}.$$

4. Soit x un réel. On a alors $\overline{x} = x$. Ainsi,

$$f(x) \times \overline{f(x)} = \frac{x-i}{x+i} \times \overline{\left(\frac{x-i}{x+i}\right)} = \frac{x-i}{x+i} \times \frac{x+i}{x-i} = 1.$$

5. Soit z un complexe différent de $-i$ tel que $f(z) \times \overline{f(z)} = 1$.
On a alors $\dfrac{z-i}{z+i} \times \overline{\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)} = 1$ et donc $\dfrac{z-i}{z+i} \times \dfrac{\overline{z}+i}{\overline{z}-i} = 1$
En développant, on obtient que :

$$\frac{z\overline{z} - i\overline{z} + iz + 1}{z\overline{z} + i\overline{z} - iz + 1} = 1$$

et donc

$$z\overline{z} - i\overline{z} + iz + 1 = z\overline{z} + i\overline{z} - iz + 1$$

On en déduit que

$$2i(z - \overline{z}) = 0$$

Or, $z - \overline{z} = \dfrac{Im(z)}{2i}$. Ainsi

$$Im(z) = 0$$

z est donc un réel.