Maths Expertes
Approfondissement

Nombres complexes
Point de vue algébrique

Évarite Galois
maths-mde.fr

Exercice 1 :

On s'intéresse au cas de l'équation $z^2+z+1=0$ d'inconnue complexe z.

1. Cette équation admet-elle des solutions réelles ?

   Soit $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Montrer que : $j^2=\frac{1}{j}=\overline{j}$.

3. Montrer que j est solution de l'équation $z^2+z+1=0$.

4. On admet qu'il existe un complexe a tel que pour tout complexe z, on ait

$$z^2+z+1=(z-j)(z-a).$$

   Déterminer la valeur de a et en déduire les solutions de l'équation $z^2+z+1=0$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 2 :

Soit x un réel et $z=2x+1+i(x^2+5x-4)$

1. Déterminer la valeur de x pour laquelle z est un imaginaire pur. Que vaut alors z ?

2. Existe-t-il des valeurs de x pour lesquelles z est réel ? Que vaut alors z ?

Exercice 3 :

On considère le complexe $z=(1-3i)(5+4i)(1+3i)(10-8i)$. Sans calcul, montrer que $z\in\mathbb{R}$.

Exercice 4 :

Soit z un complexe non nul. Montrer que $\frac{1}{z}+\frac{1}{\overline{z}}$ est un réel.

Exercice 5 :

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.
$2z+3=3\overline{z}+4-i$ $\quad$ $2z-4\overline{z}=6-3i$ $\quad$ $z+\overline{z}=3+4i$ $\quad$ $2z+4+i=(3+i)\overline{z}+2-3i$.

Exercice 6 :

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.
$z^2-\overline{z}+1=0$ $\quad$ $z^2-1\overline{z}-1=0$.

Exercice 7 :

On considère la fonction f définie pour tout z dans $\mathbb{C}$ par $f(z)=z^2+2z+9$.

1. On notons $z=a+ib$. Exprimer les parties réelles et imaginaires de $f(z)$ en fonction de a et b.

2 Quels sont les nombres complexes dont l'image par f est un réel ?

Exercice 8 :

Pour tout complexe z différent de 1, on pose $f(z) = \dfrac{2-iz}{1-z}$.

1 Montrer que $f(z)$ ne peut pas être égal à i.

2 Soit Z un complexe différent de i. Déterminer, s'il(s) existe(nt), le(s) antécédent(s) de Z par f.

Exercice 9 :

On considère la suite (z_n) définie par $z_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \dfrac{z_n - 6}{1+i}$.

1 Exprimer z_1 et z_2 sous forme algébrique.

2 Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = z_n - 6i$.

(a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

(b) En déduire une expression de u_n puis de z_n en fonction de n.

3 On considère la suite (t_n) définie par $t_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $t_{n+1} = \dfrac{t_n - 6}{1-i}$.

(a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $t_n = \overline{z_n}$.

(b) Sans avoir recours à un nouveau calcul, exprimer t_n en fonction de n pour tout entier naturel n.

Exercice 10 :

On considère la fonction $f : z \mapsto \dfrac{z-i}{z+i}$, définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$.

1 Exprimer $f(1+2i)$ sous forme algébrique.

2 Montrer que pour tout complexe $z \neq -i$, $f(z) \neq 1$.

3 Soit Z un complexe différent de 1. Déterminer l'unique antécédent de Z par f.

4 Soit x un réel. Montrer que $f(x) \times \overline{f(x)} = 1$.

5 Réciproquement, soit z un complexe différent de $-i$ tel que $f(z) \times \overline{f(z)} = 1$. Montrer que z est réel.