Des nombres complexes à la géométrie

Évarite Galois
maths-mde.fr

Exercice 1 :

1 Forme algébrique :

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{2-6i}{1+i} \\ &= \frac{(2-6i)(1-i)}{1-i^2} \\ &= \frac{2-2i-6i+6i^2}{2} \\ &= \frac{-4-8i}{2} \\ &= -2-4i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= (5+i)(3i-2) \\ &= 15i-10+3i^2-2i \\ &= -13+13i. \end{aligned}$$

2 Forme algébrique du conjugué:

$$\begin{aligned} z_3 &= \frac{1+3i}{i-5}+1 \\ &= \frac{1+3i+i-5}{i-5} \\ &= \frac{4i-4}{i-5} \\ &= \frac{(4i-4)(i+5)}{i^2-25} \\ &= \frac{4i^2+20i-4i-20}{-26} \\ &= \frac{16i-24}{-26} \\ \overline{z_3} &= \frac{16i+24}{26} \\ \overline{z_3} &= \frac{12}{13}+\frac{8}{13}i. \end{aligned}$$

Exercice 2 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1 $3z-2i=0 \Leftrightarrow z=\frac{2i}{3} \Leftrightarrow S=\left\{\frac{2i}{3}\right\}$.

2 $\frac{-7}{29}i+\frac{3}{29}$ est la solution de cette équation. En effet,

$$\begin{aligned} (8-3i)z+2i=z &\Leftrightarrow z=\frac{-2i}{7-3i} \\ &\Leftrightarrow z=\frac{-2i(7+3i)}{7^2-(3i)^2} \\ &\Leftrightarrow z=\frac{-14i+6}{58} \\ &\Leftrightarrow z=\frac{-7}{28}i+\frac{3}{28}. \end{aligned}$$

3 $-1+\frac{3}{2}i$ est la solution de cette équation. En effet,

$$\begin{aligned} 4\overline{z}+i+7=3-5i &\Leftrightarrow 4\overline{z}=-6i-4 \\ &\Leftrightarrow \overline{z}=-1-\frac{3}{2}i \\ &\Leftrightarrow z=-1+\frac{3}{2}i. \end{aligned}$$

4 Notons $z=a+ib$. Ainsi

$$\begin{aligned} & 8iz+2\overline{z}+1=3+4i \\ \Leftrightarrow\ & 8i(a+ib)+2(a-ib)+1=3+4i \\ \Leftrightarrow\ & 8ai-8b+2a-2bi+1=3+4i \\ \Leftrightarrow\ & (8a-2b)i-8b+2a+1=3+4i \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} 8a-2b &=4 \\ -8b+2a+1 &=3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} 4a-b &=2 \quad L1 \\ -4b+a &=1 \quad L2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} 4a-b &=2 \quad L1 \\ -16b+4a &=4 \quad 4L1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} 4a-b &=2 \quad L1 \\ 15b &=-2 \quad L1-4L2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} a &=\frac{7}{15} \\ b &=-\frac{2}{15} \end{cases} \end{aligned}$$

Par conséquent, $\frac{7}{15}-\frac{2}{15}i$ est la solution de cette équation.

Exercice 3 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1. Le discriminant Δ de $3z^2-5z+1=0$ est égal à $(-5)^2-4\times3\times1=25-12=13$.

   Celui-ci étant strictement positif, l'équation admet deux solutions réelles :
   $z_1=\dfrac{5-\sqrt{13}}{6}$ et $z_2=\dfrac{5+\sqrt{13}}{6}$.

   Ainsi, $S=\left\{\dfrac{5-\sqrt{13}}{6};\dfrac{5+\sqrt{13}}{6}\right\}$.

2. Le discriminant de l'équation $z^2+z+1=0$ est égal à $1^2-4\times1\times1=-3$.

   Celui-ci étant strictement négatif, l'équation admet deux solutions dans $\mathbb{C}$:
   $z_1=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ et $z_1=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

   Ainsi, $S=\left\{\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2};\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right\}$.

3. $z^2-\sqrt{2}z+3=2\Leftrightarrow z^2-\sqrt{2}z+1=0$.

   Le discriminant Δ de $z^2-\sqrt{2}z+3=2$ est égal à $\left(-\sqrt{2}\right)^2-4\times1\times1=2-4=-2$.

   Celui-ci étant strictement négatif, l'équation admet deux solutions dans $\mathbb{C}$:
   $z_1=\dfrac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}$ et $z_1=\dfrac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}$.

   Ainsi, $S=\left\{\dfrac{\sqrt{2}-i\sqrt{10}}{2};\dfrac{\sqrt{2}+i\sqrt{10}}{2}\right\}$.

4.
$$\begin{aligned}&(z^2-4z+2)(z^2-z+1)=0\\ \Leftrightarrow\quad & z^2-4z+2=0 \text{ ou } z^2-z+1=0.\end{aligned}$$

   Le discriminant de l'équation $z^2-4z+2=0$ est égal à $(-4)^2-4\times1\times2=8$.

   Celui-ci étant strictement positif, l'équation admet deux solutions réelles :

   $z_1=\dfrac{4-\sqrt{8}}{2}$ et $z_2=\dfrac{4+\sqrt{8}}{2}$.

   Le discriminant de l'équation $z^2-z+1=0$ est égal à $(-1)^2-4\times1\times1=-3$.

   Celui-ci étant strictement négatif, l'équation admet deux solutions dans $\mathbb{C}$:

   $z_3=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$ et $z_4=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

   Ainsi,

   $S=\left\{2-\sqrt{2};2+\sqrt{2};\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2};\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$.

Exercice 4 :

1. On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par : $P(z)=z^3-5z^2+11z-10$.

   (a) 2 est une racine de P, car $P(2)=2^3-5\times2^2+11\times2-10=8-20+22-10=0$.

   (b) Ètant donné que 2 est une racine de P, ce polynôme peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}P(z)&=(z-2)(z^2+bz+c)\\&=z^3+bz^2+cz-2z^2-2bz-2c\\&=z^3+(b-2)z^2+(c-2b)z-2c.\end{aligned}$$

   Ceci entraine que : $\begin{cases}b-2&=-5\\c-2b&=11\\-2c&=-10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b&=-3\\c&=5\end{cases}$.

   Ainsi, $P(z)=(z-2)(z^2-3z+5)$.

   (c)

$$\begin{aligned}P(z)=0&\Leftrightarrow(z-2)(z^2-3z+5)=0\\&\Leftrightarrow z-2=0 \text{ ou } z^2-3z+5=0\end{aligned}$$

Le discriminant de l'équation $z^2-3z+5=0$ est égal à $(-3)^2-4\times 1\times 5=-11$.
Celui-ci étant strictement négatif, l'équation admet deux solutions dans $\mathbb{C}$:
$z_1=\dfrac{3-i\sqrt{11}}{2}$ et $z_2=\dfrac{3+i\sqrt{11}}{2}$.
Ainsi, $S=\left\{2;\dfrac{3-i\sqrt{11}}{2};\dfrac{3+i\sqrt{11}}{2}\right\}$.

$\boxed{2}$ On procède de la même manière pour résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $2z^3+7z^2+9z+4=0$.
On remarque que -1 est une solution évidente. En effet,
$2\times(-1)^3+7\times(-1)^2+9\times(-1)+4=-2+7-9+4=0$.
On déduit alors qu'il existe deux nombres b et c dans $\mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{aligned}2z^3+7z^2+9z+4 &= (z+1)(2z^2+bz+c)\\ &= 2z^3+bz^2+cz+2z^2+bz+c\\ &= 2z^3+(b+2)z^2+(c+b)z+c.\end{aligned}$$

Ce qui implique, $\left\{\begin{array}{ll} b+2 & =7\\ c+b & =9\\ c & =4\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} b & =5\\ c & =4\end{array}\right.$.
Ainsi, $P(z)=(z+1)(2z^2+5z+4)$.
Le discriminant du polynôme $2z^2+5z+4$ est égal à $5^2-4\times2\times4=25-32=-7$.
Celui-ci étant strictement négatif, le polynôme admet deux racines dans $\mathbb{C}$:
$z_1=\dfrac{-5-i\sqrt{7}}{4}$ et $z_2=\dfrac{-5+i\sqrt{7}}{4}$.
Par conséquent, $S=\left\{-1;\dfrac{-5-i\sqrt{7}}{4};\dfrac{-5+i\sqrt{7}}{4}\right\}$.

Exercice 5 :

Soit x un nombre réel. On sait que $\exp(x+y)=\exp(x)\exp(y)$

$\boxed{1}$ $e^{3x}\times e^{2x-1}=e^{3x+2x-1}=e^{5x-1}$.

$\boxed{2}$ $\dfrac{e^{x^2}}{e^{x-3}}=e^{x^2-x+3}$.

$\boxed{3}$ $\left(e^{x+2}\right)^2=e^{2(x+2)}=e^{2x+4}$.

$\boxed{4}$ $\dfrac{\left(e^{x-1}\right)^3\times e^{3-5x}}{e^{-2x+6}}=\dfrac{e^{3(x-1)+3-5x}}{e^{-2x+6}}=e^{-6}$.

Exercice 6 :

$\boxed{1}$ À l'aide d'un cercle trigonométrique, on obtient :

(a) $\cos\left(\dfrac{-2\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{2}$ et $\sin\left(\dfrac{-2\pi}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(b) $\cos\left(\dfrac{23\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos\left(\dfrac{23\pi}{6}\right)=-\dfrac{1}{2}$.

(c) $\cos\left(\dfrac{25\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos\left(\dfrac{25\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(d) $\cos\left(\dfrac{-11\pi}{2}\right)=0$ et $\cos\left(\dfrac{-11\pi}{2}\right)=1$.

$\boxed{2}$ (a) Si $\cos(x)=-1$ et $\sin(x)=0$, alors $x=\pi+2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$.

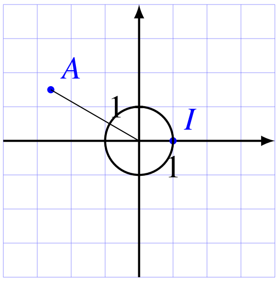
(b) Sin $\cos(x)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(x)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, alors $x=\dfrac{5\pi}{4}+2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$.

$\boxed{3}$ Si $\begin{cases} \cos(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(x) = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$, alors $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi;\ \ 2k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 7 :

On considère un plan muni d'un repère orthonormé $(O;I;J)$, d'unité le centimètre.

$\boxed{1}$ Placer le point A tel que $\widehat{IOA} = \dfrac{5\pi}{6}$ rad et $OA = 3$ cm.



$\boxed{2}$ Calculons BC, CD et DB :

$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_D)^2} = \sqrt{(-1-1)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

$CD = \sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2} = \sqrt{(-1-1)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

$DB = \sqrt{(x_B - x_D)^2 + (y_B - y_D)^2} = \sqrt{(1-1)^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{16} = 4$.

Le triangle BCD a deux côtés de même longueur, il est donc isocèle.

Exercice 8 :

On considère un plan muni d'un repère orthonormé $(O;I;J)$.
Soient A, B et C trois points définis par :
$\star$ $\widehat{IOA} = \dfrac{3\pi}{4}$ rad et $OA = 2\sqrt{2}$;

$\star$ B apparient au cercle trigonométrique de centre O tel que $\widehat{IOB} = \dfrac{3\pi}{2}$ rad;

$\star$ C a pour coordonnées $(3;1)$.
Calculons les coordonnées de $A(x_A;y_A)$:

$x_A = 2\sqrt{2} \times \cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = -2\sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = -2$.

$x_A = 2\sqrt{2} \times \sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2$.

Calculons les coordonnées de $B(x_B;y_B)$ appartenant au cercle trigonométrique :

$x_B = \cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = 0$.

$y_B = \sin\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = -1$.

Calculons AB, AC et BC :

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - x_A)^2} = \sqrt{(0-(-2))^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$.

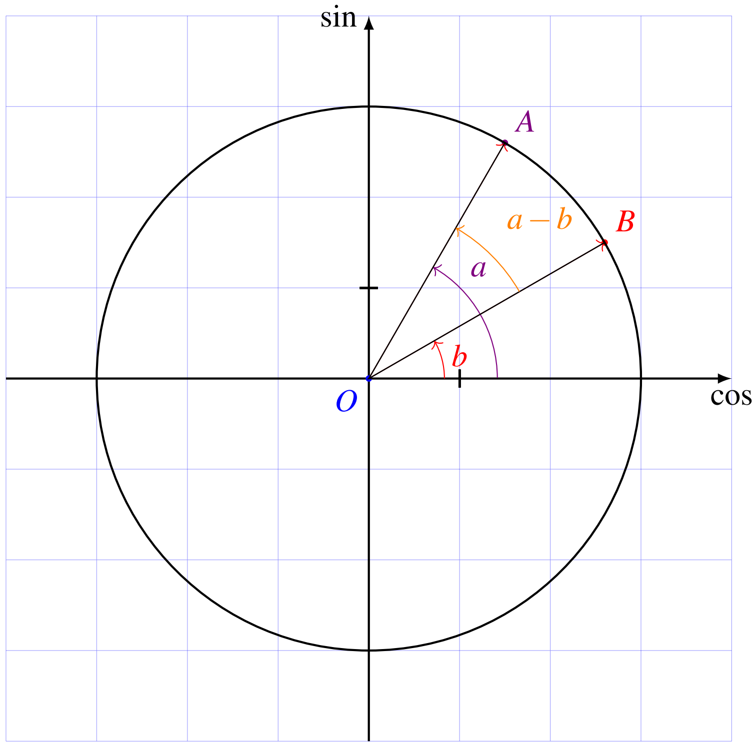
$CB = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - x_C)^2} = \sqrt{(0-3)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$.

$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - x_A)^2} = \sqrt{(3-(-2))^2 + (1-2))^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$.

On remarque que : $AC^2 = AB^2 + CB^2$ et $AB = CB$. Ainsi, le triangle ABC est rectangle et isocèle en B.

Exercice 9 :

On considère le cercle unité ci-après. Soient a et b deux mesures angles.



$\boxed{1}$ Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OA}$ de deux façons différentes.

D'une part,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} &= \|\overrightarrow{OA}\|\|\overrightarrow{OB}\|\cos\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\\ &= \cos(a-b).\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} &= \begin{pmatrix}\cos(a)\\ \sin(a)\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\cos(b)\\ \sin(b)\end{pmatrix}\\ &= \cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b).\end{aligned}$$

Ainsi,

$\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$.

$\boxed{2}$ Il suffit d'utiliser l'égalité précédente,

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos(a-(-b))\\ &= \cos(a)\cos(-b)+\sin(a)\sin(-b)\\ &= \cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b).\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ On sait que :

$\cos(a)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)$ et $\sin(a)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-a\right)$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}&\sin(a+b)\\ =\ &\cos\left(\frac{\pi}{2}-a-b\right)\\ =\ &\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\cos(b)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\sin(b)\\ =\ &\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b).\end{aligned}$$

$\boxed{4}$ Il suffit d'utiliser l'égalité précédente,

$$\begin{aligned}\sin(a-b) &= \sin(a+(-b))\\ &= \sin(a)\cos(-b)+\cos(a)\sin(-b)\\ &= \sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b).\end{aligned}$$

$\boxed{5}$ En utilisant l'égalité de la question 2, on obtient :

$$\begin{aligned}\cos(2a) &= \cos(a+a)\\ &= \cos(a)\cos(a)-\sin(a)\sin(a)\\ &= \cos^2(a)-\sin^2(a)\\ &= \cos^2(a)-(1-\cos^2(a))\\ &= 2\cos^2(a)-1.\end{aligned}$$

6. En utilisant l'égalité de la question 3, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \sin(2a) & = & \sin(a+a) \\ & = & \sin(a)\cos(a)+\cos(a)\sin(a) \\ & = & 2\sin(a)\cos(a). \end{array}$$

Exercice 10 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacun des systèmes de deux équations à deux inconnus suivants.

$\boxed{1}$

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{2}z_1+z_2 & =2 \\ \frac{1}{2}\overline{z_1}+i\times\overline{z_2} & =0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{2}z_1+z_2 & =2 \\ \overline{\frac{1}{2}\overline{z_1}+i\times\overline{z_2}} & =0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} \frac{1}{2}z_1+z_2 & =2 & L_1 \\ \frac{1}{2}z_1-iz_2 & =0 & L_2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} (1+i)z_2 & =2 & L_1-L_2 \\ \frac{1+i}{2}z_1 & =2i & L_2+iL_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} z_2 & =\frac{2}{1+i} \\ z_1 & =\frac{4i}{1+i} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} z_2 & =\frac{2(1-i)}{1^2-i^2} \\ z_1 & =\frac{4i(1-i)}{1^2-i^2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} z_2 & =1-i \\ z_1 & =2i+2 \end{array}\right. .$$

$\boxed{2}$

$$\left\{\begin{array}{ll} 3z_1-2z_2 & =4i-2 \\ \overline{z_1}+2\overline{z_2} & =2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 3z_1-2z_2 & =4i-2 \\ \overline{\overline{z_1}+2\overline{z_2}} & =2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} 3z_1-2z_2 & =4i-2 & L_1 \\ z_1+2z_2 & =2 & L_2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} 4z_1 & =4i & L_1+L_2 \\ -8z_2 & =4i-8 & L_1-3L_2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} z_1 & =i \\ z_2 & =-\frac{1}{2}i+1 \end{array}\right. .$$

$\boxed{3}$

$$\left\{\begin{array}{ll} z_1-z_2 & =3-4i \\ \overline{z_1}+2\overline{z_2} & =8-i \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} z_1-z_2 & =3-4i \\ \overline{\overline{z_1}+2\overline{z_2}} & =\overline{8-i} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} z_1-z_2 & =3-4i & L_1 \\ z_1+2z_2 & =8+i & L_2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} -3z_2 & =-5-5i & L_1-L_2 \\ 3z_1 & =14-7i & L_2+2L_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} z_2 & =\frac{5+5i}{3} \\ z_1 & =\frac{14-7i}{3} \end{array}\right. .$$

$\boxed{4}$

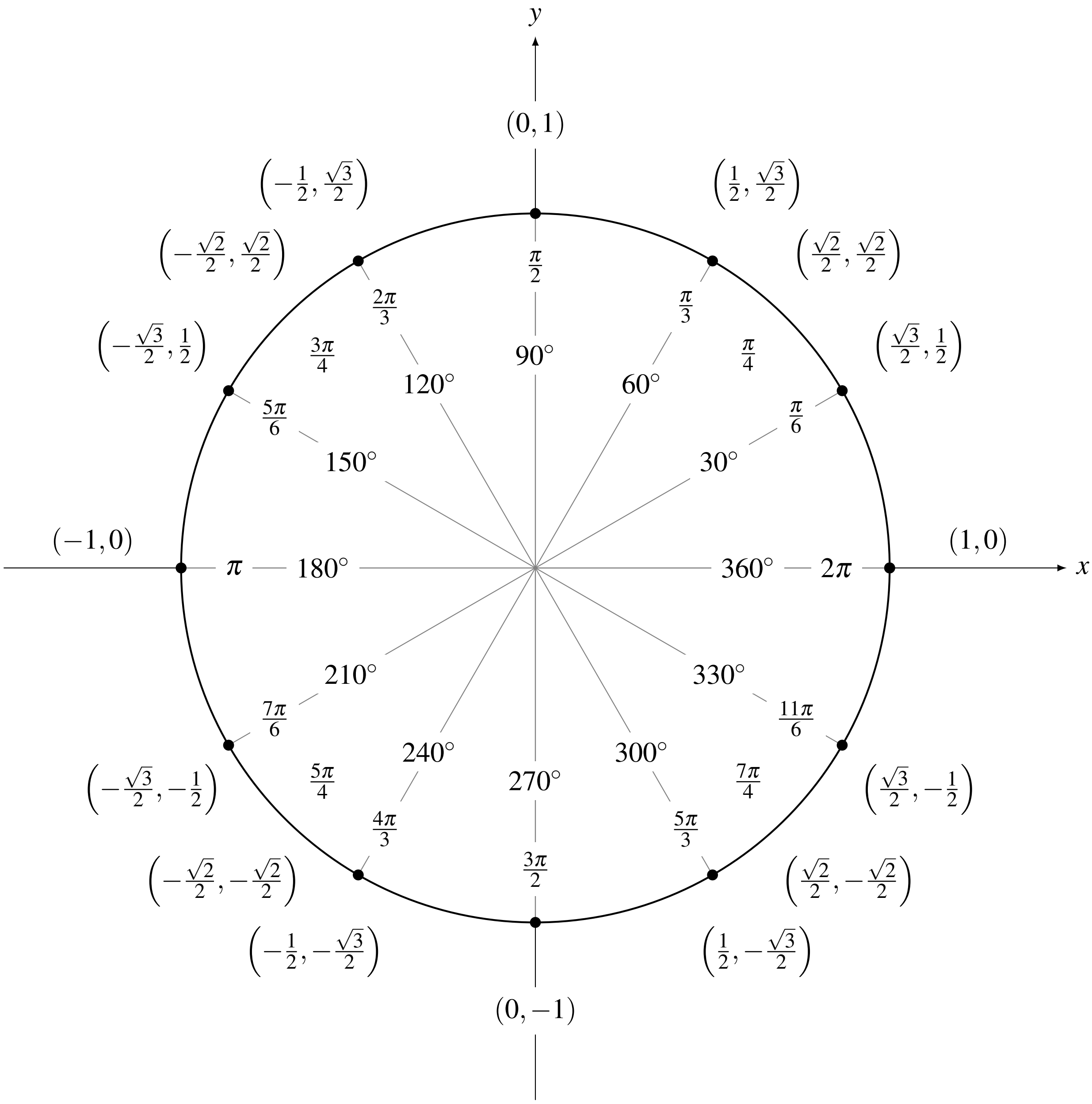
$$\left\{\begin{array}{ll} 6z_1-3z_2 & =12+i \\ 3\overline{z_1}-\overline{z_2} & =6 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 6z_1-3z_2 & =12+i \\ \overline{3\overline{z_1}-\overline{z_2}} & =6 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} 6z_1-3z_2 & =12+i & L_1 \\ 3z_1-z_2 & =6 & L_2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} -z_2 & =i & L_1-2L_2 \\ -3z_1 & =i-6 & L_1-3L_2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} z_2 & =-i \\ z_1 & =\frac{-i+6}{3} \end{array}\right. .$$



y
x
$(0,1)$
$(1,0)$
$(-1,0)$
$(0,-1)$
$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
$\frac{\pi}{2}$ 90°
$\frac{\pi}{3}$ 60°
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{6}$ 30°
$\frac{2\pi}{3}$ 120°
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{5\pi}{6}$ 150°
π 180°
360° 2π
$\frac{7\pi}{6}$ 210°
$\frac{5\pi}{4}$
$\frac{4\pi}{3}$ 240°
$\frac{3\pi}{2}$ 270°
$\frac{5\pi}{3}$ 300°
$\frac{7\pi}{4}$
$\frac{11\pi}{6}$ 330°