Des nombres complexes
à la géométrie

Évarite Galois
maths-mde.fr

Exercice 1 :

1. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants : $z_1 = (5+i)(3i-2)$ et $z_2 = \dfrac{2-6i}{1+i}$.

2. Déterminer la forme algébrique du conjugué du nombre complexe $z_3 = \dfrac{1+3i}{i-5} + 1$.

Exercice 2 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1. $3z - 2i = 0$.
2. $(8-3i)z + 2i = z$.
3. $4\overline{z} + i + 7 = 3 - 5i$.
4. $8iz + 2\overline{z} + 1 = 3 + 4i$.

Exercice 3 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1. $3z^2 - 5z + 1 = 0$.
2. $z^2 + z + 1 = 0$.
3. $z^2 - \sqrt{2}z + 3 = 2$.
4. $(z^2 - 4z + 2)(z^2 - z + 1) = 0$.

Exercice 4 :

1. On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par : $P(z) = z^3 - 5z^2 + 11z - 10$.
   (a) Montrer que 2 est une racine de P.
   (b) En déduire une factorisation du polynôme P.
   (c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $2z^3 + 7z^2 + 9z + 4 = 0$.

Exercice 5 :

Soit x un nombre réel. Simplifier les écritures suivantes.

1. $e^{3x} \times e^{2x-1}$.
2. $\dfrac{e^{x^2}}{e^{x-3}}$.
3. $\left(e^{x+2}\right)^2$.
4. $\dfrac{\left(e^{x-1}\right)^3 \times e^{3-5x}}{e^{-2x+6}}$.

Exercice 6 :

1. À l'aide d'un cercle trigonométrique, déterminer le cosinus et le sinus des angles suivants exprimés en radian.
   (a) $\dfrac{-2\pi}{3}$. (b) $\dfrac{23\pi}{6}$. (c) $\dfrac{25\pi}{4}$. (d) $\dfrac{-11\pi}{2}$.

2. Dans chaque cas, déterminer une valeur de x vérifiant les conditions données.

(a) $\cos(x) = -1$ et $\sin(x) = 0$.

(b) $\cos(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système d'équations suivant : $\begin{cases} \cos(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(x) = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$.

Exercice 7 :

On considère un plan muni d'un repère orthonormé $(O;I;J)$, d'unité le centimètre.

1 Placer le point A tel que $\widehat{IOA} = \dfrac{5\pi}{6}$ rad et $OA = 3$ cm.

2 Déterminer la nature du triangle BCD tel que $B(1;3)$, $C(-1;1)$ et $D(1;-1)$.

Exercice 8 :

On considère un plan muni d'un repère orthonormé $(O;I;J)$.
Soient A, B et C trois points définis par :
$\star$ $\widehat{IOA} = \dfrac{3\pi}{4}$ rad et $OA = 2\sqrt{2}$;
$\star$ B apparient au cercle trigonométrique de centre O tel que $\widehat{IOB} = \dfrac{3\pi}{2}$ rad;
$\star$ C a pour coordonnées $(3;1)$.
Déterminer la nature du triangle ABC.

Exercice 9 :

Pour tous réels a et b, montrer les relations suivantes.

1 $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$.

2 $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.

3 $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$.

4 $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$.

5 $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$.

6 $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$.

Exercice 10 :

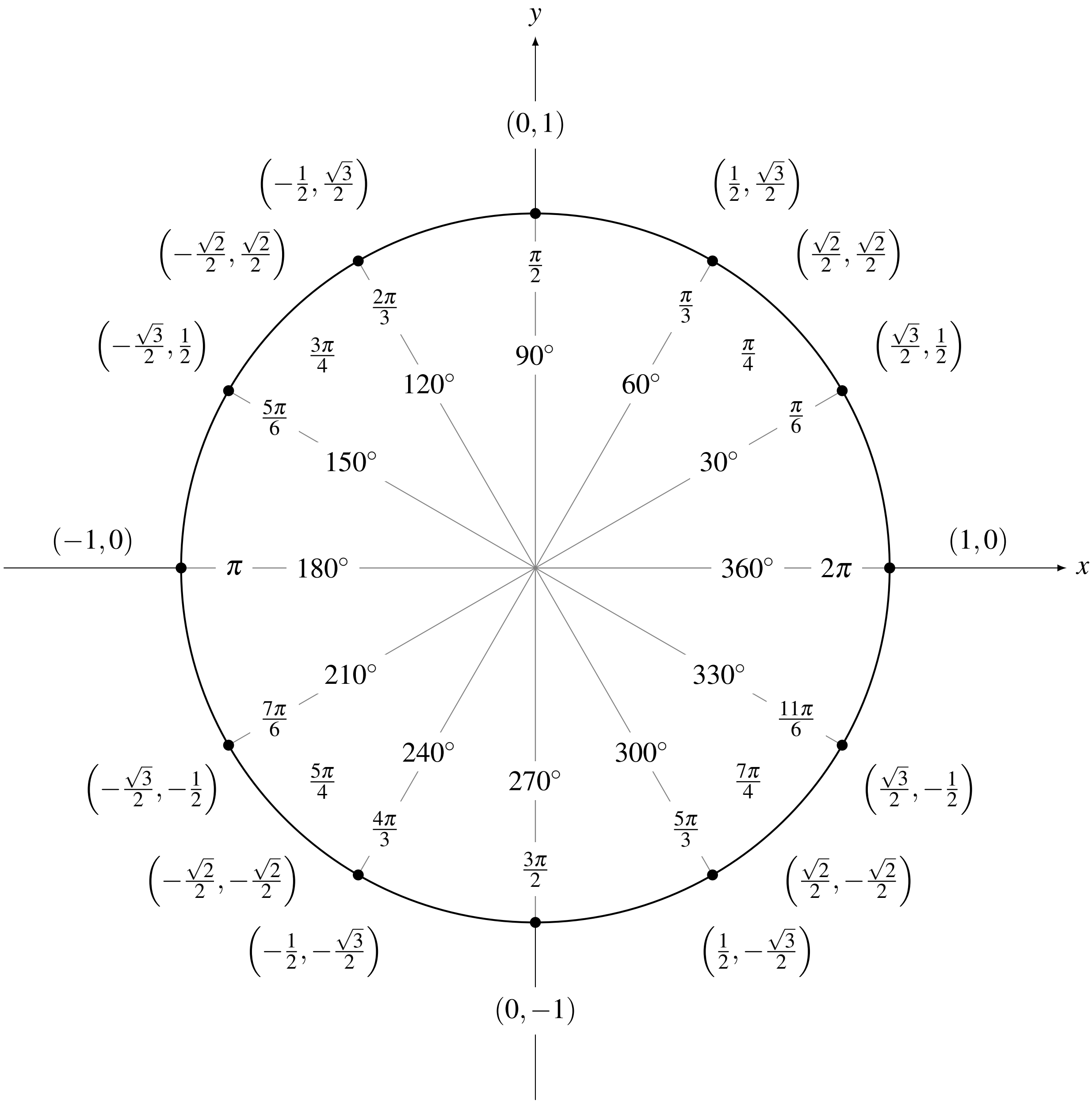
Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacun des systèmes de deux équations à deux inconnus suivants.

1 $\begin{cases} \dfrac{1}{2}z_1 + z_2 & = 2 \\ \dfrac{1}{2}\overline{z_1} + i \times \overline{z_2} & = 0 \end{cases}$.

2 $\begin{cases} 3z_1 - 2z_2 & = 4i - 2 \\ \overline{z_1} + 2\overline{z_2} & = 2 \end{cases}$.

3 $\begin{cases} z_1 - z_2 & = 3 - 4i \\ \overline{z_1} + 2\overline{z_2} & = 8 - i \end{cases}$.

4 $\begin{cases} 6z_1 - 3z_2 & = 12 + i \\ 3\overline{z_1} - \overline{z_2} & = 6 \end{cases}$.


y
x
(0,1)
(0,−1)
(1,0)
(−1,0)
$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\frac{\pi}{2}$ 90°
$\frac{\pi}{3}$ 60°
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{6}$ 30°
2π 360°
$\frac{2\pi}{3}$ 120°
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{5\pi}{6}$ 150°
π 180°
$\frac{7\pi}{6}$ 210°
$\frac{5\pi}{4}$
$\frac{4\pi}{3}$ 240°
$\frac{3\pi}{2}$ 270°
$\frac{5\pi}{3}$ 300°
$\frac{7\pi}{4}$
$\frac{11\pi}{6}$ 330°