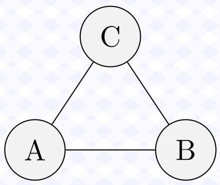
Types de graphes

Cours et exercices

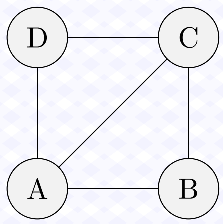
1 Pour commencer

Exemples

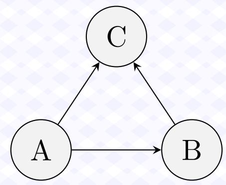
Graphe simple à 3 sommets



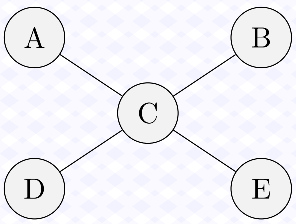
Graphe simple à 4 sommets



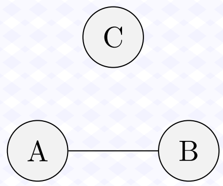
Graphe orienté



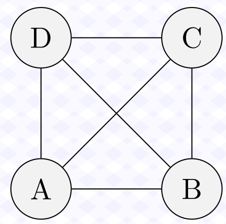
Graphe connexe



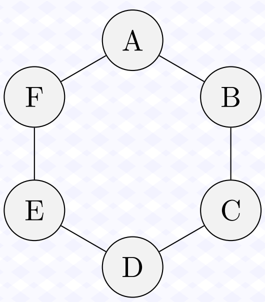
Graphe non connexe



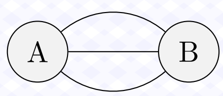
Graphe complet K_4



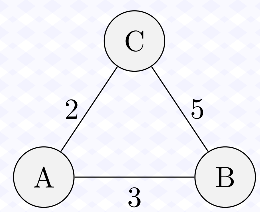
Cycle C_6



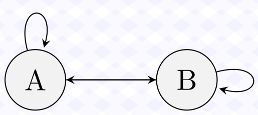
Arêtes multiples



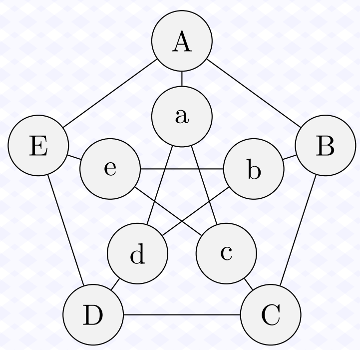
Graphe pondéré



Graphe orienté + boucles



Graphe de Petersen

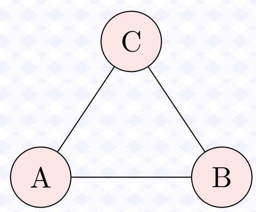


Définitions

- Un **graphe** est un couple $G = (V, E)$ où V est l'ensemble des sommets et E l'ensemble des arêtes reliant certains couples de sommets.
- Un **graphe orienté** possède des arêtes munies d'une direction (ex : $A \to B$).
- Un **graphe simple** est un graphe non orienté, sans boucle et sans arêtes multiples.
- Un **graphe complet** relie chaque sommet à tous les autres.
- Un **graphe connexe** possède un chemin entre toute paire de sommets.
- Un **graphe régulier** a tous ses sommets de même degré, autrement dit ayant un même nombre d'arêtes incidentes à ce sommet.
- Un **cycle** est un graphe formant une boucle simple.

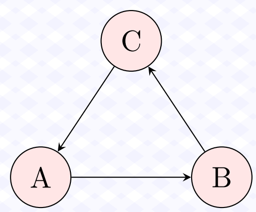
Exercices

1 On considère le graphe suivant :



a. Ce graphe est-il simple ?..
b. Est-il connexe ?..
c. Est-il complet ?..
d. Donner le degré de chaque sommet.. ....

2 On considère le graphe orienté suivant :

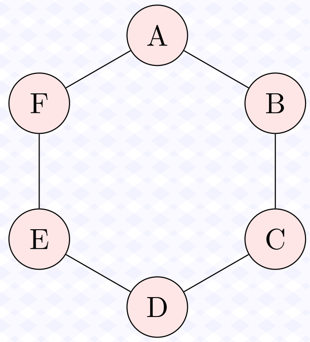


a. Donner le degré entrant et sortant de chaque sommet...
b. Ce graphe possède-t-il un cycle orienté ?...
c. Est-il connexe ?..

3 On considère le graphe suivant :

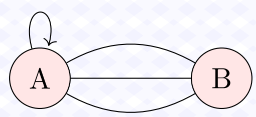
a. Combien de composantes connexes possède ce graphe ?...
b. Peut-on le rendre connexe en ajoutant une seule arête ?..
c. Donner un exemple d'arête à ajouter...

4 On considère le cycle C_6 suivant :



1. Donner le degré de chaque sommet. ....
2. Ce graphe est-il 2-régulier ? ....
3. Ce graphe est-il complet ? ....
4. Combien d'arêtes possède-t-il ? ....

5 On considère le graphe suivant :



a. Ce graphe est-il simple ? ....
b. Donner le degré du sommet A (attention à la boucle). ....
c. Combien d'arêtes distinctes relient A et B ? ....

2 Chaîne eulérienne & Cycle eulérien

Définitions

- Une **chaîne eulérienne** dans un graphe non orienté est une suite d'arêtes telle que chaque arête du graphe est parcourue **exactement une fois**.
- Un **cycle eulérien** est une chaîne eulérienne qui commence et se termine au **même sommet**.
- Un graphe est dit **eulérien** s'il admet un cycle eulérien, et **semi-eulérien** s'il admet une chaîne eulérienne mais pas de cycle eulérien.

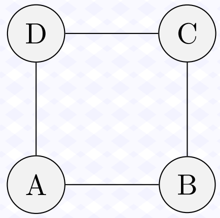
Propriétés

Soit G un graphe non orienté, connexe, sans boucle multiple.

- G admet un **cycle eulérien** $\iff$ **tous** ses sommets sont de degré pair.
- G admet une **chaîne eulérienne** (mais pas de cycle) $\iff$ il a **exactement deux sommets de degré impair**.
- S'il y a plus de deux sommets de degré impair, G n'a **aucune** chaîne eulérienne.

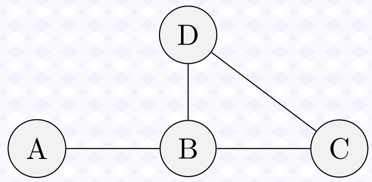
Exemples

Graphe eulérien



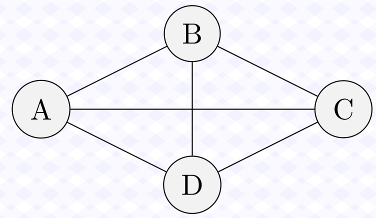
Tous degrés pairs

Graphe semi-eulérien



2 sommets impairs

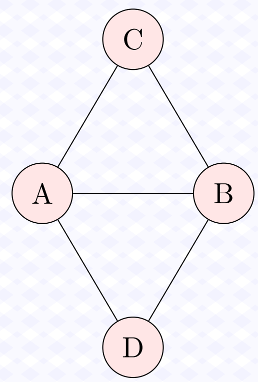
Graphe non eulérien



$>$ 2 sommets impairs

Exercices

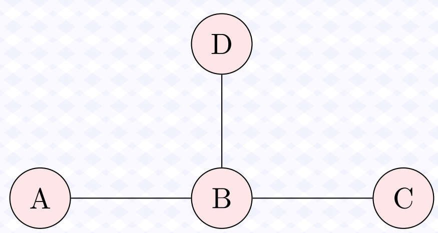
1 On considère le graphe suivant :



a. Donner le degré de chaque sommet. . . . .

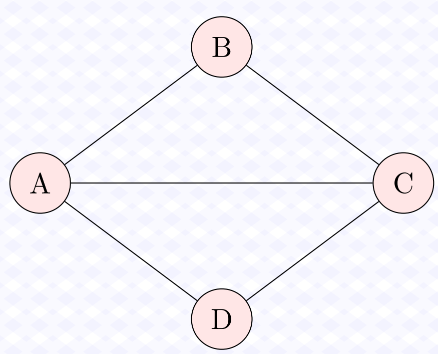
b. Le graphe est-il eulérien ? semi-eulérien ?. . . . .

2 On considère le graphe suivant :



1. Donner le degré de chaque sommet. . . . .
2. Le graphe est-il eulérien ? semi-eulérien ?. . . . .
3. Donner une chaîne eulérienne si elle existe. . . . .

3 On considère le graphe suivant :

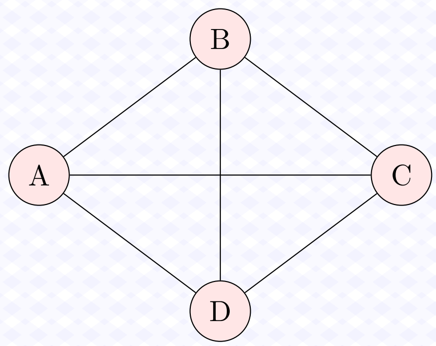


1. Déterminer les degrés. ....
2. Le graphe est-il eulérien ? semi-eulérien ?. ....
3. Si oui, donner une chaîne eulérienne.. ....

4 On considère le graphe suivant :

1. Le graphe peut-il être eulérien ?. ....
2. Peut-il être semi-eulérien ?...
3. Justifier. ....

5 On considère le graphe suivant :



1. Calculer les degrés.. ....
2. Le graphe est-il eulérien ?...
3. Donner un cycle eulérien.. ....

3 Matrice d'adjacence

Définitions

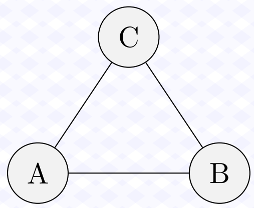
Soit $G = (V, E)$ un graphe simple à n sommets, numérotés $1, 2, \ldots, n$.
La **matrice d'adjacence** de G est la matrice carrée $A = (a_{ij})$ définie par :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si une arête relie } i \text{ et } j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour un graphe non orienté simple, la matrice est **symétrique**.

Exemples

Triangle



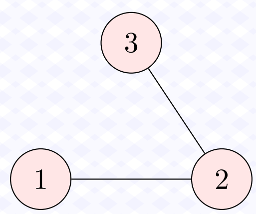
Graphe non connexe

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

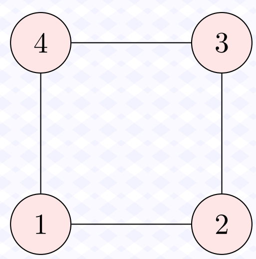
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercices

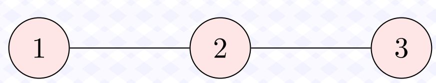
1 Déterminer la matrice d'adjacence.



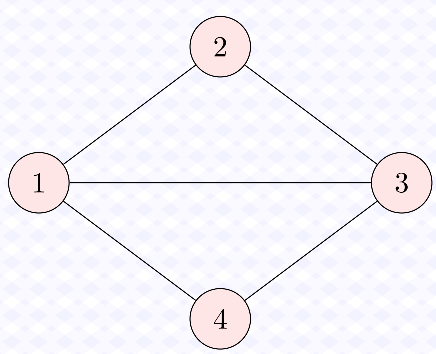
2 Déterminer la matrice d'adjacence.



3 Déterminer la matrice d'adjacence.



4 Déterminer la matrice d'adjacence.



5 Déterminer la matrice d'adjacence.