Chaînes & Graphes

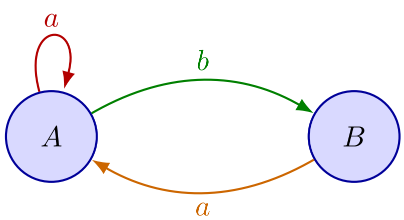
Puissances d'une matrice d'adjacence

Objectifs :

- Comprendre qu'un graphe représente des chaînes.
- Comprendre qu'une matrice d'adjacence compte ces chaînes.
- Retenir que les puissances de la matrice comptent les chemins.

Exemple 1

Considérons le graphe orienté suivant.



- Depuis le sommet A, on peut aller de A vers A et de A vers B.
- Depuis le sommet B, il n'y a qu'un seul chemin possible de B vers A.

La matrice d'adjacence du graphe est alors donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Chaque coefficient de cette matrice décrit les transitions possibles entre les sommets.

Ainsi, chaque coefficient de la matrice M_{ij} vaut : $\begin{cases} 1 & \text{si une arête relie } i \text{ à } j, \\ 0 & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$

Chaînes de longueur 1

Les chaînes de longueur 1 obtenues à partir du sommet A sont : $A \to A$ et $A \to B$.
Il existe donc 2 chaînes possibles de longueur 1 partant de A.
Ce résultat correspond à la somme des coefficients de la première ligne de la matrice M.

Chaînes de longueur 2

Calculons maintenant :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le coefficient $(M^2)_{11} = 2$ indique qu'il existe exactement deux chemins de longueur 2 reliant A à A :

$$A \to A \to A \quad \text{et} \quad A \to B \to A.$$

Il y a donc deux chaînes de longueur 2 reliant A à A et une chaine de longueur 2 reliant A à B.
Au total, Il y en a exactement 3 chaines de longueur 2 partant de A.
On retrouve ce résultat en additionnant les coefficients de la première ligne de M^2 : $2 + 1 = 3$.

Chaînes de longueur 3

En calculant,

$$M^3 = M^2 M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

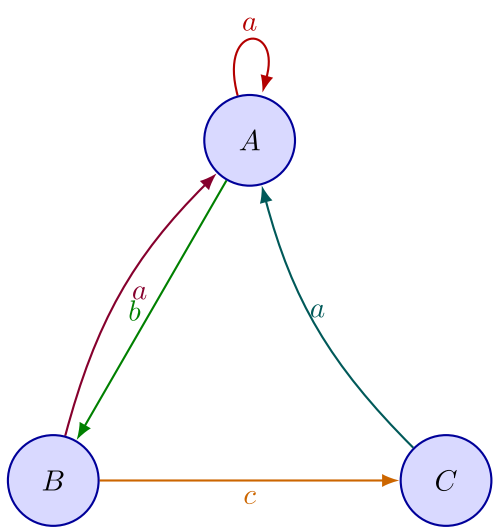
Le coefficient $(M^3)_{11} = 3$ indique qu'il existe exactement 3 chemins de longueur 2 reliant A à A :

$$A \to A \to A \to A \qquad A \to B \to A \to A \quad \text{et} \quad A \to A \to B \to A.$$

La somme des coefficients de la première ligne vaut : $3 + 2 = 5$. Ce qui signifie qu'il existe 5 chaînes de longueur 3 en partant de A.

Exemple 2

Considérons le graphe orienté suivant.



Les transitions suivantes :

- depuis A, on peut aller vers A ou B ;
- depuis B, on peut aller vers A ou C ;
- depuis C, on peut aller vers A.

La matrice d'adjacence est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$M_{12} = 1$ signifie qu'il existe une arête de A vers B.
$M_{33} = 0$ signifie qu'il n'existe pas d'arête de C vers C.

Chaînes de longueur 2

En calculant,

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On obtient ainsi le coefficient $(M^2)_{11} = 2$, ce la signifie que qu'il y a 2 chemins de longueur 2 allant de A vers A. Ces chemins sont :

$$A \to A \to A \quad \text{et} \quad A \to B \to A.$$

Pourquoi les puissances comptent les chemins ?

Dans le produit matriciel :

$$(M^2)_{ij} = \sum_k M_{ik} M_{kj}$$

on choisit :

- un sommet intermédiaire k ;
- un chemin de i vers k ;
- puis un chemin de k vers j.

Donc, M^2 compte les chemins de longueur 2.
De même, M^n compte les chemins de longueur n.