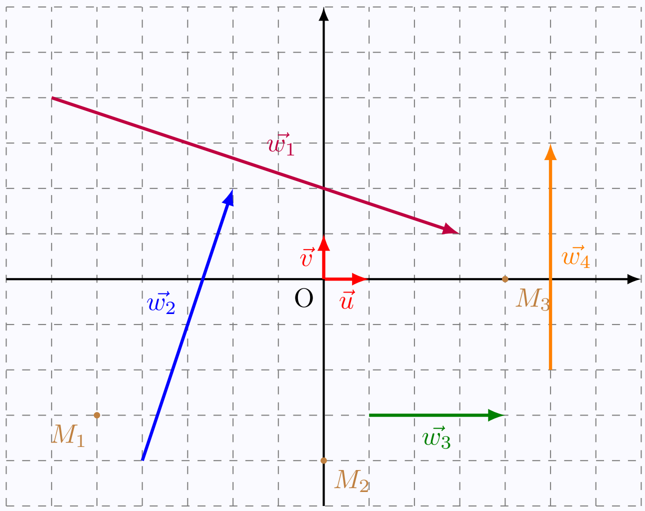
Série d'exercices

Corrigés — Classe : Maths Expertes — Lycée : Evariste Galois

Exercice n°1

Donner l'affixe des points et vecteurs de la figure ci-dessous :



Exercice n°2

Calculer la valeur du module de chacun des nombres complexes suivants.

a) i.
b) $1+\mathrm{i}$.
c) $1-\mathrm{i}$.
d) $-3+2\mathrm{i}$.
e) -4.
f) $3+4\mathrm{i}$.
g) $5-2\mathrm{i}$.
h) $4{,}5+6\mathrm{i}$.

Exercice n°3

Calculer :

1. $\left|(1+\mathrm{i})^{16}\right|$;
2. $\left|(2-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})\right|$;
3. $\left|\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right|$;
4. $(5-3\mathrm{i})(5+3\mathrm{i})$.

Exercice n°4

Pour chacun des nombres complexes suivants, trouver le module et un argument, puis écrire sa forme trigonométrique.

1. $z_1=1+\mathrm{i}$.
2. $z_2=2\sqrt{3}+2\mathrm{i}$.
3. $z_3=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.
4. $z_4=-2+2\mathrm{i}$.

Exercice n°5

1. Déterminer simplement le module et un argument de $z_1=(1+\mathrm{i})^4$, puis en déduire la forme algébrique de z_1.
2. Déterminer simplement le module et un argument de $z_2=\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$, puis en déduire la forme algébrique de z_2.

Exercice n°6

On pose $z=\cos\dfrac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}$ et $z'=\cos\dfrac{\pi}{4}-\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}$.

1. Donner la forme trigonométrique de zz'.
2. Donner la forme algébrique de zz'.
3. Déduire des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

Exercice n°7

On considère le nombre complexe j tel que :

$$\mathrm{j}^2+\mathrm{j}+1=0 \quad , \quad \Im(\mathrm{j})>0.$$

Montrer que $\mathrm{j}=e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ et que $\bar{\mathrm{j}}^{\,2}+\bar{\mathrm{j}}+1=0$.

Exercice n°8

On considère la suite (z_n) définie par son premier terme $z_0=\mathrm{i}$ et, pour tout entier naturel n, par la relation de récurrence :

$$z_{n+1}=\frac{1}{2}\mathrm{i}z_n+1-\mathrm{i}.$$

1. Calculer z_1 et z_2.
   Pour tout entier naturel n, on pose :
   $$v_n=z_n-\frac{6}{5}+\frac{2}{5}\mathrm{i}.$$
2. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
3. En déduire une expression de v_n, puis de z_n, en fonction de n.
4. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}|v_n|=0$. Que peut-on en déduire pour $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n$?

Exercice n°9

À l'aide de la formule de duplication et des valeurs de $\cos\dfrac{\pi}{4}$ et $\sin\dfrac{\pi}{4}$, trouver les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{8}$ et $\sin\dfrac{\pi}{8}$.

Exercice n°10

Déterminer la valeur exacte de $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12}$.

Exercice n°11

À l'aide de la formule de Moivre, donner la forme algébrique des nombres suivants.

1. $(1+\mathrm{i})^9$.
2. $\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)^6$.
3. $\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^9$.

Exercice n°12

À l'aide des formules d'Euler, écrire $\cos^3(x)$ sous la forme d'une expression linéarisée (sans puissance).

Exercice n°13

À l'aide des formules d'Euler, écrire $\sin^5(x)$ sous la forme d'une expression linéarisée (sans puissance).

Exercice n°14

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$C_n = 1 + \cos(x) + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx)$$

et

$$S_n = \sin(x) + \sin(2x) + \cdots + \sin(nx).$$

En considérant le nombre complexe $z_n = C_n + \mathrm{i}S_n$, montrer que :

$$C_n = \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \times \frac{\sin\left[(n+1)\frac{x}{2}\right]}{\sin\frac{x}{2}}$$

puis trouver une expression analogue pour S_n.

Aide : on pourra penser à utiliser l'égalité suivante :

$$e^{\mathrm{i}x} - 1 = e^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}\left(e^{\mathrm{i}\frac{x}{2}} - e^{-\mathrm{i}\frac{x}{2}}\right).$$

Exercice n°15

Trouver tous les nombres complexes z tels que $z^3 = 1$ et donner leur forme exponentielle.

Exercice n°16

Les nombres complexes suivants sont-il donnés en écriture exponentielle ?
Dans le cas contraire, transformer l'écriture afin qu'elle devienne exponentielle.

1. $3\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\pi}$.
2. $-2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.
3. $\pi e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.
4. 5.
5. $4e^{\frac{\pi}{5}}$.
6. $-\pi$.

Exercice n°17

On donne :

$$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

1. Montrer l'égalité suivante :
$$\frac{1-e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{1-e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{24}}.$$
2. Montrer que :
$$\frac{1-e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{1-e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}} = \frac{1+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{4} + \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}.$$
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{24}$ et $\sin\frac{\pi}{24}$.

Exercice n°18

Montrer que $\mathrm{i}^{\mathrm{i}} \in \mathbb{R}$.

Exercice n°19

On pose :

$$w = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}.$$

1. Simplifier w^5 puis calculer $1 + w + w^2 + w^3 + w^4$.
2. Monter que pour tout nombre complexe z non nul,
$$\frac{1}{z^2}\left(1 + z + z^2 + z^3 + z^4\right) = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1.$$
3. (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
$$Z^2 + Z - 1 = 0.$$
   (b) En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice n°20

Factoriser dans $\mathbb{C}$:

1. $z^3 - 27$;
2. $z^5 - \mathrm{i}$;
3. $z^4 - 4$;
4. $z^6 + 64$.

Exercice n°21

Soit $P(z) = \frac{1}{2}z^3 + 5z + \frac{11}{2}$.

Montrer que $P(-1) = 0$, puis résoudre l'équation $P(z) = 0$.

Exercice n°22

On considère l'équation :

$$z^4 + 3z^3 - z - 3 = 0. \qquad \text{(E)}$$

1. Montrer que -3 est solution de (E).
2. Trouver une autre solution simple de (E).
3. Résoudre (E).

Exercice n°23

Résoudre l'équation :

$$3\mathrm{i}z^2 + 2z + \mathrm{i} = 0. \qquad \text{(E)}$$

Exercice n°24

On souhaite résoudre l'équation :

$$2z^2 - 3z + 3 - \mathrm{i} = 0. \qquad \text{(E)}$$

1. Trouver les réels a et b tels que $(a+\mathrm{i}b)^2 = -15+8\mathrm{i}$.
2. En déduire les solutions de (E).