Série d'exercices

Corrigés Classe : Maths Expertes Lycée : Evariste Galois

Exercice n°1

On considère les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&5\\3&1&-2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1&3\\2&-1\\5&0\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}1&5&0\\-2&1&2\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1&-3\\-2&1\\-5&0\end{pmatrix}.$$

1. Donner les dimensions de ces matrices.
2. Effectuer toutes les sommes de matrices possibles.
3. Calculer $B+2D$.

Exercice n°2

Soient $A=\begin{pmatrix}-1&2\\3&-1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}2&-1\\-2&3\end{pmatrix}$.
Calculer $A\times B$ puis $B\times A$ et constater la non commutativité du produit matriciel dans un cas général.

Exercice n°3

Soient $A=\begin{pmatrix}7&-4\\-5&3\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}3&4\\5&7\end{pmatrix}$.
Montrer que A et B sont inverses l'une de l'autre.

Exercice n°4

Dans chacun des cas suivants, déterminer la matrice inverse de A quand cela est possible.

a) $A=\begin{pmatrix}1&-6\\4&3\end{pmatrix}$.

b) $A=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}$.

c) $A=\begin{pmatrix}-5&1\\4&7\end{pmatrix}$.

d) $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$.

Exercice n°5

On considère la matrice :

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix},$$

1. Calculer A^2, puis A^3 à l'aide de la calculatrice (par exemple).
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,
$$A^n=\begin{pmatrix}1&n&\frac{n(n+1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix},$$
3. Si on remplace n par -1 dans l'expression précédente, obtient-on l'inverse de A ?

Exercice n°6

Soit la matrice :

$$A=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-3&4&-3\\-1&1&0\end{pmatrix},$$

I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3.

1. Calculer $A^2-3A+2I_3$.
2. En déduire que A est inversible, et déterminer son inverse.

Exercice n°7

On considère les matrices :

$$N=\begin{pmatrix}3&9&-9\\2&0&0\\3&3&-3\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad A=\begin{pmatrix}4&9&-9\\2&1&0\\3&3&-2\end{pmatrix}$$

1. Calculer N^2 puis N^3.
2. En remarquant que $A=N+I_3$, I_3 étant la matrice identité d'ordre 3, donner une expression de A^n pour tout entier naturel $n\geqslant 3$.

N est qualifiée de *nilpotente* car il existe un entier naturel k (ici, $k=3$) pour lequel $N^k=0$.

Exercice n°8

Résoudre de façon matricielle les systèmes linéaires suivants.
On pourra effectuer les calculs à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel pour déterminer l'inverse des matrices utilisées.

1. $\begin{cases}3x-5y&=7\\-4x+2y&=1\end{cases}$,
2. $\begin{cases}5x+4y&=-1\\3x-y&=2\end{cases}$,
3. $\begin{cases}x+y+z&=1\\x-y+z&=2\\x+y-z&=3\end{cases}$,
4. $\begin{cases}x+2y+3z&=6\\x-2y-3z&=-6\\x+y-2z&=0\end{cases}$,

Exercice n°9

À l'aide de votre calculatrice et en associant à chacun des systèmes suivant sa matrice, trouver leurs solutions.

1. $\begin{cases}x+2y&=1\\x+3y&=2\end{cases}$,

2. $\begin{cases} 3x-5y &= 7 \\ 2x-7y &= 5 \end{cases}$.

3. $\begin{cases} -x+2y &= -1 \\ 2x+4y &= 1 \end{cases}$.

4. $\begin{cases} 5x+4y &= -3 \\ 3x+4y &= 5 \end{cases}$.

5. $\begin{cases} x+y-z &= 1 \\ 2x-3y+z &= -1 \\ x+2y-z &= 2 \end{cases}$.

6. $\begin{cases} x+2y+3z &= 4 \\ 3x+2y+z &= 0 \\ x-y+z &= 1 \end{cases}$.

Exercice n°10

On considère les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ définies par $a_0 = 0{,}3$, $b_0 = 0{,}7$ et :

$$\begin{cases} a_{n+1} &= 0{,}7a_n + 0{,}6b_n \\ b_{n+1} &= 0{,}3a_n + 0{,}4b_n \end{cases}$$

Pour tout entier naturel n, on définit la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. Écrire la matrice A telle que $U_{n+1} = AU_n$.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_n = A^n U_0$.
3. À l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel de calcul formel, calculer A^2, A^3 et A^4.
   Que peut-on conjecturer quant à $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n$, et donc sur les limites des suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$?

Exercice n°11

On considère les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ définies par $u_0 = 0$, $v_0 = 1$ et :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \frac{1}{2}(u_n + v_n) \\ v_{n+1} &= \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \end{cases},$$

Pour tout entier naturel n, on définit la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1. Écrire la matrice A telle que $U_{n+1} = AU_n$.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_n = A^n U_0$.
3. On définit les matrices
   $P = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.
   Montrer que P et Q sont inverses l'une de l'autre.
4. Déterminer la matrice diagonale D telle que $QDP = A$.
5. En déduire que pour tout entier naturel n, $U_n = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} - \frac{3}{5} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$.
6. En déduire la limite des suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$.

Exercice n°12

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2^n$.

1. Montrer que pour tout entier naturel n,
   $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.
2. En considérant la somme des $u_{n+1} - u_n$, exprimer u_n en fonction de n, puis A^n.

Exercice n°13

On considère un polynôme de degré 3 dont la courbe représentative passe par les points de coordonnées :

$$A(-2;-1), \quad B(-1;3), \quad C(1;5), \quad D(2;34)\cdot$$

Donner l'expression de ce polynôme.

Exercice n°14

On considère un mot constitué de lettres : $L_1L_2\cdots L_n$, n étant pair.
Soient 4 nombres a, b, c et d qui vont constituer la clé du chiffrement.
On remplace L_i par sa position dans l'alphabet en convenant d'avoir 0 pour A, 1 pour B, etc. On obtient alors une suite de nombres : u_1, u_2, $\cdots$, u_n. On pose alors :

$$\forall k \in [\![1, \frac{n}{2}]\!], \begin{pmatrix} c_{2k-1} \\ c_{2k} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{2k-1} \\ u_{2k} \end{pmatrix} \mod 26$$

On obtient une suite de nombres c_1, c_2, $\cdots$, c_n qui correspond à une suite de lettres.
Choisissons la clé matricielle $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}$.

1. Expliquer comment obtenir le chiffrement du mot « CRYP ».
2. Expliquer le déchiffrement.

Exercice n°15

On considère la suite $(u_n)_{n\in mathbbN}$définie par ses deux premiers termes $u_0 = 3$ et $u_1 = 1$, et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} - u_n,$$

On pose alors :

$$U_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

et la matrice A telle que $U_{n+1} = AU_n$.

1. Donner l'expression de A.
2. Calculer A^2, puis A^3. En déduire l'inverse de A.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.