

Série d'exercices

Corrigés

Classe : Maths Expertes

Lycée : Evariste Galois

Exercice n° 1

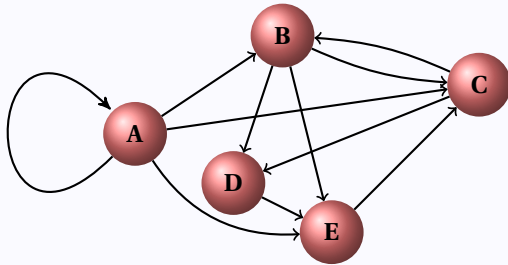
Soit \mathcal{G} un graphe complet avec n sommets. Dans chacun des cas suivants, donner le nombre d'arêtes.

- a) $n = 10$. b) $n = 5$. c) $n = 300$. d) $n = 75$.

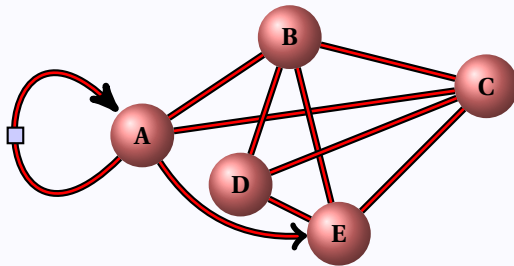
Exercice n° 2

Pour chacun des graphes suivants, donner la matrice d'adjacence correspondant à l'ordre indiqué des sommets, puis déterminer le nombre de chaînes de longueur p demandé.

1. Ordre des sommets pour la matrice d'adjacence : A, B, C, D, E. Combien y a-t-il de chaînes de longueur 3 qui vont de A à E?



2. Ordre des sommets pour la matrice d'adjacence : A, B, C, D, E. Combien y a-t-il de chaînes de longueur 3 qui vont de C à C?



Exercice n° 3

Les sites internet A, B, C ont des liens entre eux. Un internaute connecté sur un de ces trois sites peut, à toutes les minutes, soit y rester soit utiliser un lien vers un des deux autres sites.

- Pour un internaute connecté sur le site A, la probabilité d'utiliser le lien vers B est de 0,2 et celle d'utiliser le lien vers C est de 0,2.
- Pour un internaute connecté sur le site B, la probabilité d'utiliser le lien vers A est de 0,1 et celle d'utiliser le lien vers C est de 0,4.
- Pour un internaute connecté sur le site C, la probabilité d'utiliser le lien vers A est de 0,2 mais il n'y a pas de lien direct avec B.

L'unité de temps est la minute, et à un instant $t = 0$, le nombre de visiteurs est, respectivement sur les sites A, B et C : 100, 0 et 0. On représente la distribution des internautes sur les trois sites après t minutes par une matrice N_t ; ainsi, $N_0 = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On suppose qu'il n'y a ni déconnexion pendant l'heure (de $t = 0$ à $t = 60$) ni nouveaux internautes visiteurs.

- Représenter le graphe probabiliste de sommets A, B et C correspondant à la situation décrite.
- Écrire la matrice M de transition associée à ce graphe (dans l'ordre A, B, C).
- On donne :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0,42 & 0,22 & 0,36 \\ 0,19 & 0,27 & 0,54 \\ 0,28 & 0,04 & 0,68 \end{pmatrix}$$

et

$$M^{20} \approx \begin{pmatrix} 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \\ 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \\ 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \end{pmatrix},$$

Calculer N_2 . Interpréter le résultat obtenu.

- Calculer $N_0 \times M^{20}$. Conjecturer la valeur de l'état stable et interpréter la réponse.
- Un des internautes transmet un virus à tout site qu'il visitera. Il se connecte initialement sur le site C et commence sa navigation. À l'instant $t = 0$, le site C est donc infecté.
 - Quelle est la probabilité qu'à l'instant $t = 1$ le site A soit infecté?
 - Quelle est la probabilité qu'à l'instant $t = 2$ les trois sites soient infectés?

Exercice n° 4

Une région se divise en deux zones :

- une zone A à proximité d'une grande agglomération
- une zone B à proximité de la mer

Chaque année, 20% des habitants de la zone A partent habiter dans la zone B pour avoir un meilleur cadre de vie, et 5% des habitants de la zone B partent habiter dans la zone A pour se rapprocher de leur lieu de travail.

On sait de plus qu'en 2010, 40% de la population habitait dans la zone A.

On suppose que le nombre total d'habitants de la région reste constant au cours du temps.

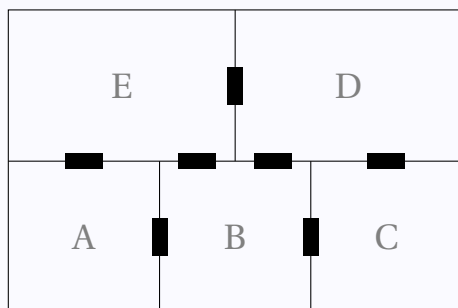
Pour tout entier naturel n , l'état probabiliste correspondant à l'année $2010 + n$ est défini par la matrice ligne $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$, où a_n et b_n désignent respectivement les proportions d'habitants des zones A et B.

- Déterminer la matrice ligne P_0 de l'état initial.
- Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.

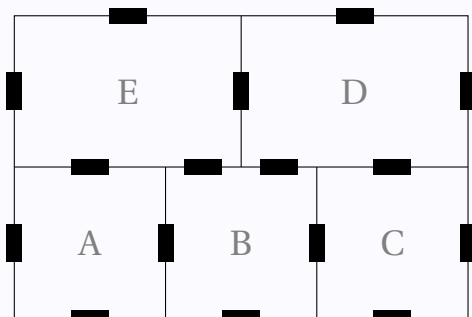
3. (a) Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.
(b) Donner la répartition de la population en 2012.
4. Dans la question suivante, on considère la matrice ligne $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ où a et b sont deux nombres réels tels que $a + b = 1$.
(a) Déterminer a et b pour que $P = PM$.
(b) Les infrastructures de la zone B permettent d'accueillir au maximum 75% de la population. Lors d'un conseil municipal, le maire affirme qu'il va falloir prévoir de nouvelles infrastructures. A-t-il raison?

Exercice n° 5

Voici les plans de deux maisons :



Maison 1

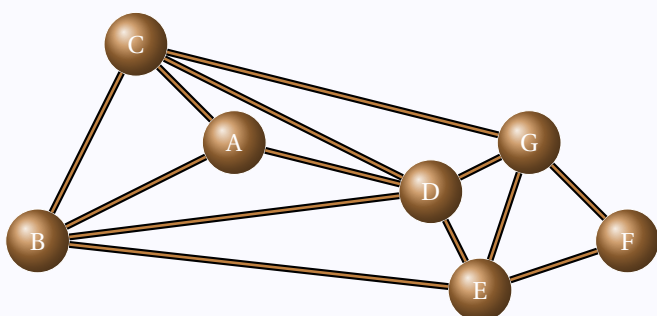


Maison 2

Donner un graphe représentant ces deux maisons, où les arêtes représentent un passage d'une pièce à l'autre.

Exercice n° 6

Un parc est composé de 7 attractions principales A, B, C, D, E, F et G. Le graphe ci-dessous représente les liaisons entre elles :



1. Ce graphe est-il complet?
2. Quel est l'ordre de ce graphe?
3. Écrire la matrice d'adjacence de ce graphe (en ordonnant les sommets dans l'ordre alphabétique).
4. À l'aide de votre calculatrice, trouver le nombre de chemins de longueur 3 reliant E à C.

Exercice n° 7

Une site internet est composée de 5 pages, notées A, B, C, D et E.

- Sur la page A, sont mis des liens vers les pages B et C;
- Sur la page B, sont mis des liens vers les pages A, C et E;
- Sur la page C, sont mis des liens vers les pages A et D;
- Sur la page D, sont mis des liens vers les pages A, B, C et E;
- Sur la page E, est mis un lien vers la page A.

1. Construire le graphe correspondant à ce site, où les sommets désignent les pages, et les arêtes désignent les liens.
2. Écrire la matrice d'adjacence de ce graphe.
3. Le webmaster se trouve sur la page A. Combien de chemins de longueur 4 existent pour revenir sur cette page?
4. Proposer un chemin pour tester tous les liens de ce site en partant de la page A.

Exercice n° 8

Deux entreprises A et B se disputent le marché innovateur des couches culotte en papier recyclé. Les études de marché ont montrées que d'une année à l'autre :

- l'entreprise A perd 13% de ses clients au profit de l'entreprise B;
- l'entreprise B perd 15% de ses clients au profit de l'entreprise A.

Les autres clients restent fidèles à leur marque.

L'année de lancement de ces produits, les deux entreprises avaient chacune d'elles 50% du marché.

On désigne par $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne représentant la répartition du marché sur ces deux entreprises. Ainsi, $P_0 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$.

1. Construire le graphe probabiliste de cette situation.
2. Donner la matrice de transition de ce graphe.
3. Quelle sera la répartition du marché 1 année après le lancement du produit? Après 5 années?
4. Déterminer l'état stable de ce marché, puis interpréter ce résultat.