Série d'exercices

Corrigés | Classe : Maths Expertes | Lycée : Evariste Galois

Exercice n°1

Pour chacun des nombres suivants, donner la liste de ses diviseurs positifs.

a) 123. b) 56. c) 78. d) 1 517.

Exercice n°2

Compléter le programme Python suivant afin que la fonction `liste_diviseurs(n)` retourne la liste de tous les diviseurs positifs de l'entier relatif n.

```
def liste_diviseurs(n):
    L = []
    for k in range(... , ...):
        if ... :
            L.append(k)

    return L
```

Exercice n°3

1. Déterminer les entiers naturels n tels que $n+7$ soit un multiple de 5.
2. Montrer que $51n+4$ n'est jamais divisible par 17.

Exercice n°4

Soient $a = 2n+1$ et $b = n+13$, $n \in \mathbb{Z}$.
Déterminer tous les entiers relatifs n tels que $a|b$.

Exercice n°5

Déterminer les entiers relatifs n tels que $a = n-4$ divise $b = 3n-17$.

Exercice n°6

Soit n un entier naturel non nul.

1. Montrer que $n+1$ est un diviseur de n^3+n^2+n+1.
2. En déduire deux diviseurs de 1 111.

Exercice n°7

Soit n un entier naturel.

1. Démontrer que si n est impair alors 4 divise n^2-1.
2. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice n°8

Comment choisir l'entier relatif n pour qu'il divise $n+p$?

Exercice n°9

Montrer que la somme de quatre entiers consécutifs est divisible par 2.

Exercice n°10

Résoudre l'équation $n^2 = m^2 + 11$, où m et n sont deux entiers relatifs.

Exercice n°11

On pose $A_n = 2n^2+11n+32$ et $B_n = n+3$ pour tout entier relatif n. On se demande pour quelles valeurs de n B_n divise A_n.

1. Montrer que $A_n = (n+3)(2n+5)+17$.
2. Conclure.

Exercice n°12

On souhaite démontrer que 5^n+19 est toujours divisible par 4 pour tout entier naturel n.

1. Exprimer de façon plus simple la somme
$$1+5+5^2+\cdots+5^{n-1}$$
en fonction de n.
2. Conclure.

Exercice n°13

Démontrer que pour tout entier relatif p, $p(p^2-1)$ est divisible par 2 et par 3.

Exercice n°14

Démontrer que pour tout entier naturel n impair, n^2-1 est divisible par 8.

Exercice n°15

1. On considère un nombre à deux chiffres. On note d le chiffre des dizaines et u celui des unités.
Montrer qu'il est divisible par 7 si et seulement si $3d+u$ est divisible par 7.
2. Comment appliqueriez-vous ce critère pour vérifier que 392 est bien divisible par 7 ?
3. Le nombre 6 119 est-il divisible par 7 ?

Exercice n°16

1. Soit a un entier naturel.
Montrer que a^5-a est divisible par 10.
2. Soient a et b deux entiers naturels tels que $a \geqslant b$.
Démontrer que si a^5-b^5 est divisible par 10, alors a^2-b^2 est divisible par 20.

Exercice n°17

Calculer la plus grande valeur de l'entier naturel n telle que 3^n divise $1\,000\,!$.

Exercice n°18

Soit n un entier naturel.
Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $7n+5$ par $3n+1$ suivant les valeurs de n.

Exercice n°19

Soit n un entier naturel.
Quand on le divise par 4, le reste est 3.
Quand on le divise par 5, le reste est 1.
Dans les deux cas, le quotient est le même.

Quelle est la valeur de n ?

Exercice n°20

Soit n un nombre entier inférieur à 100.
Le reste de la division euclidienne de n par 2 est 1.
Le reste de la division euclidienne de n par 3 est 2.
Le reste de la division euclidienne de n par 5 est 4.
Écrire un programme Python permettant de trouver toutes les valeurs de n possibles.

Exercice n°21

Soit n un entier naturel tel que le reste de la division euclidienne de n par 17 est égal à 7.

1. Quel est le reste de la division euclidienne de n^2 par 17 ?
2. Quel est le reste de la division euclidienne de n^3 par 17 ?

Exercice n°22

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de 100 par 11, de 1 000 par 11, de 10 000 par 11, de 100 000 par 11.
   Quelle conjecture peut-on alors faire ?
2. Démontrer la conjecture.

Exercice n°23

Quel est le reste de la division euclidienne de 73^{37} par 5 ?

Exercice n°24

Calculer le reste de la division euclidienne de $13^{1\,789}$ par 14.

Exercice n°25

Quel est le reste de la division par 7 du nombre 32^{45} ?

Exercice n°26

Calculer le reste de la division euclidienne de 17^{548} par 7.

Exercice n°27

Trouver tous les entiers naturels n tels que le reste de la division euclidienne de 24^n par 7 soit égal à 3.

Exercice n°28

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 \equiv -11 \mod 100$.

Exercice n°29

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $4^n \equiv 1+3n \mod 9$.
2. En déduire que $2^{2n}+15n-1 \equiv 0 \mod 9$ pour tout entier naturel n.

Exercice n°30

Montrer que pour tout entier naturel n,

$$(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)\times 2n$$

est divisible par 2^n et trouver le quotient correspondant.

Exercice n°31

Un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

Exercice n°32

En utilisant l'algorithme d'Euclide, calculer le PGCD des nombres suivants.

a) 2 070 et 432.
b) 1 065 et 235.
c) 363 et 792.
d) 858 et 910.

Exercice n°33

Déterminer tous les couples d'entiers naturels non nuls x et y tels que $\begin{cases} x+y=5\,664 \\ x\wedge y=354 \end{cases}$.

Exercice n°34

Soient $a=3n+1$ et $b=5n-1$, où n est un entier naturel.

1. Montrer que $a\wedge b$ divise 8.
2. Montrer que si $n=8k+5$, $k\in\mathbb{N}$, alors $a\wedge b=8$.

Exercice n°35

Soit n un entier naturel.

1. Montrer que $3n+7$ et $n+2$ sont premiers entre eux.
2. Montrer que $3n+4$ et $2n+3$ sont premiers entre eux.

Exercice n°36

Soit $n\geqslant 2$ un entier naturel.
Montrer que n et n^2-1 sont premiers entre eux.

Exercice n°37

Montrer que 99 et 56 sont premiers entre eux en déterminant deux entiers u et v tels que $99u + 56v = 1$.

Exercice n°38

Soient a et p deux entiers naturels non nuls. a est dit *inversible modulo* p, s'il existe un nombre x tel que $ax \equiv 1 \mod p$.
Montrer que a est inversible modulo p si et seulement si $a \wedge p = 1$.

Exercice n°39

1. Calculer $550 \wedge 693$.
2. Déterminer un couple $(u; v)$ tel que $550u + 693v = 11$.

Exercice n°40

Soient a, b et c trois entiers naturels tels que $bc > a$.
Montrer que $(bc - a) \wedge b = a \wedge b$ à l'aide du théorème de Bézout.

Exercice n°41

Montrer que si a et b sont premiers entre eux, alors $3a + 5b$ et $a + 2b$ sont également premiers entre eux.

Exercice n°42

1. Déterminer $31 \wedge 28$ à l'aide de l'algorithme d'Euclide.

   Trouver alors deux nombres relatifs x et y tels que $31x - 28y = 1$.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $31x - 28y = 1$.

Exercice n°43

Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $108x + 55y = 1$.

Exercice n°44

1 789 est-il un nombre premier ?

Exercice n°45

1. Établir la liste des nombres premiers inférieurs à 50.
2. Le nombre 1 517 est-il premier ?
3. Déterminer tous les entiers naturels a et b tels que $a^2 = b^2 + 1\,517$.

Exercice n°46

En utilisant l'égalité :

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

trouver les valeurs de l'entier naturel n pour lesquelles $n^3 - 27$ est un nombre premier.

Exercice n°47

1. Montrer que pour tout entier naturel n, les nombres n, $n + 2$ et $n + 10$ sont distincts modulo 3.
2. En déduire que l'on ne peut pas trouver un entier naturel $n > 3$ tel que n, $n + 2$ et $n + 10$ soient tous les trois premiers.

Exercice n°48

On rappelle que la factorielle de n est le nombre :

$$n\,! = 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times n,$$

1. Combien y a-t-il de nombres pairs strictement compris entre 2^k et 2^{k+1}, pour $k \in \mathbb{N}^*$?
2. Par quelle puissance de 2 au maximum peut-on diviser $n\,!$ si $n = 2^4$?
3. Imaginer un programme Python, composé de deux fonctions :
   - une fonction `fact(n)` qui retourne $n\,!$;
   - une fonction `maxpow(n)` qui retourne le plus grand exposant de 2 dans la décomposition en produit de facteurs premiers de $(2^n)\,!$.

Exercice n°49

Soit p un nombre premier différent de 3.
Montrer que pour tout entier naturel n, $3^{n+p} - 3^{n+1}$ est divisible par p.

Exercice n°50

Soient p un nombre premier, n un entier naturel et a non divisible par p.

1. Montrer par l'absurde que le reste des divisions euclidiennes par p de a, $2a$, ... , $(p - 1)a$ sont tous distincts.
2. En déduire que $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$.
3. Montrer que la réciproque est fausse en utilisant le nombre $p = 3 \times 11 \times 17 = 561$.