Nombres complexes
Point de vue géométrique

Maths Expertes

maths-mde.fr
Cours pour élève à imprimer

Lycée Evariste Galois

I. Image d'un nombre complexe

Histoire : Activité - Corrigé

Jean-Robert Argand était un mathématicien suisse de la fin du XVIII$^{\text{e}}$ et du début du XIX$^{\text{e}}$ siècle (1768 – 1822).
Il introduisit en 1806 la représentation des nombres complexes, mais ce ne fut pas le premier. En effet, le mathématicien danois Caspar Wessel le fit un peu avant dans un de ses articles, qui passa inaperçu jusqu'en 1897 où on le retrouva.
On peut donc supposer qu'Argand eut une idée analogue à celle de Wessel sans pour autant le copier.

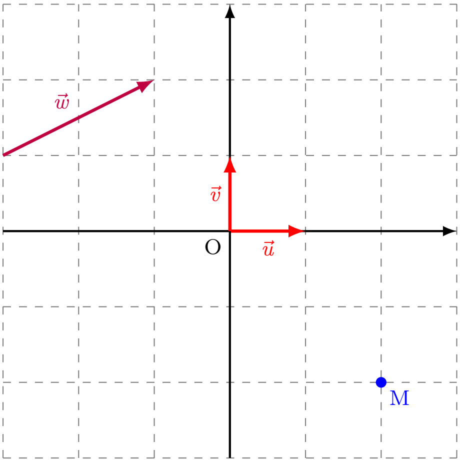
Définition

On muni le plan d'un repère $(O;\vec{u};\vec{v})$.
Dans ce repère, on décide de représenter tout nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ par le point de coordonnées $M(x;y)$.
Ce point est appelé l'*image* de z.
Ce plan est appelé *plan d'Argand-Cauchy*.
L'axe horizontal est appelé l'*axe des réels*.
L'axe vertical est appelé l'*axe des imaginaires*.

Définition

Dans le plan d'Argand-Cauchy, on considère un point $M(x;y)$ et un vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
Alors le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ est appelé l'*affixe* du point M et l'affixe du vecteur $\vec{w}$.

Exemples



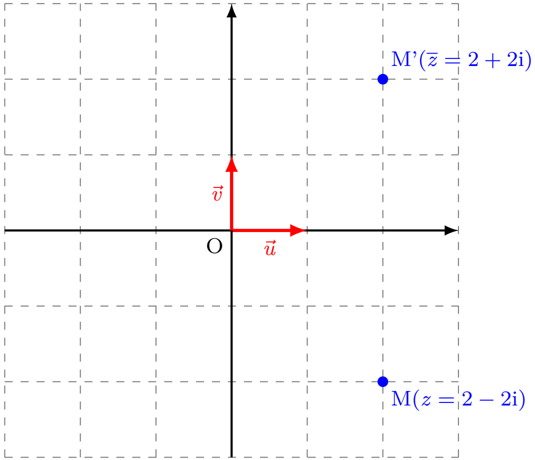
Le point M a pour affixe $z_M = 2 - 2\text{i}$ car $M(2;-2)$.

Le vecteur $\vec{w}$ a pour affixe $z_{\vec{w}} = 2 + \text{i}$ car $\vec{w}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

Propriété

Soit $z = x + \mathrm{i}y$ un nombre complexe et soit M son image dans le plan d'Argand-Cauchy.
L'image de $\overline{z}$ est le symétrique de M par rapport à l'axe des réels.

Exemple

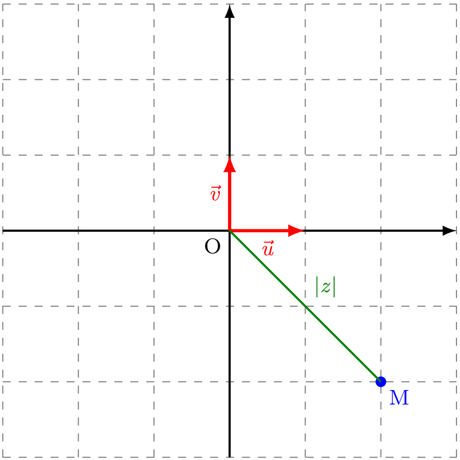


II. Module d'un nombre complexe

Définition

Soient $z = x + \mathrm{i}y$ un nombre complexe et M son image dans le plan d'Argand-Cauchy.
On appelle *module* de z, et on note $|z|$, la distance entre l'origine du repère et le point M.

Exemple



Propriétés

Soit $z = x + iy$.
Alors,

$$|z| = |\overline{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

La démonstration tient en une ligne en utilisant le théorème de Pythagore.

Propriétés

Pour tous nombres complexes z et $z' \neq 0$, et pour tout entier naturel n :

1. $|z|^2 = z\overline{z}$.
2. $|zz'| = |z| \times |z'|$.
3. $|z^n| = |z|^n$.
4. $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.

Démonstration

Posons $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$.

1. $|z|^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = x^2 + y^2$.

   $z\overline{z} = (x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y) = x^2 - (\mathrm{i}y)^2 = x^2 - (-y^2) = x^2 + y^2$.

   Donc $|z|^2 = z\overline{z}$.

❷ $$\begin{aligned}|zz'| &= |(x+\mathrm{i}y)(x'+\mathrm{i}y')| \\ &= |xx'-yy'+\mathrm{i}(xy'+x'y)| \\ &= \sqrt{(xx'-yy')^2+(xy'+x'y)^2} \\ &= \sqrt{(xx')^2-2xx'yy'+(yy')^2+(xy')^2+2xy'x'y+(x'y)^2} \\ &= \sqrt{(xx')^2+(yy')^2+(xy')^2+(x'y)^2}\end{aligned}$$

De plus, $$\begin{aligned}|z|\times|z'| &= \sqrt{x^2+y^2}\times\sqrt{(x')^2+(y')^2} \\ &= \sqrt{(x^2+y^2)\left((x')^2+(y')^2\right)} \\ &= \sqrt{(xx')^2+(xy')^2+(yx')^2+(yy')^2}\end{aligned}$$

Donc $|zz'| = |z|\times|z'|$.

❸ Démontrons par récurrence sur n que $|z^n| = |z|^n$.

- **Initialisation :** pour $n=0$, $|z^n| = |z^0| = |1| = 1 = |z|^0$.
- **Hérédité :** supposons que pour un entier k fixé, $|z^k| = |z|^k$. Alors,

$$\begin{aligned}|z^{k+1}| &= |z^k\times z^1| \\ &= |z^k|\times|z| \text{ d'après le point 2 précédemment démontré} \\ &= |z|^k\times|z| \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= |z|^{k+1}.\end{aligned}$$

L'hérédité est alors vérifiée.

D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, $|z^n| = |z|^n$.

4
- Montrons avant tout que $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{z}\right| &= \left|\frac{1}{x+\mathrm{i}y}\right| \\
&= \left|\frac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2}\right| \\
&= \left|\frac{x}{x^2+y^2} - \mathrm{i}\frac{y}{x^2+y^2}\right| \\
&= \sqrt{\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{x^2+y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{x^2+y^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \frac{1}{|z|}.
\end{aligned}$$

- $\left|\frac{z}{z'}\right| = \left|z \times \frac{1}{z'}\right|$

$$= |z| \times \left|\frac{1}{z'}\right| \text{ d'après le point 2 précédemment démontré}$$

$$= |z| \times \frac{1}{|z'|} = \frac{|z|}{|z'|}.$$

Définition

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes dont le module est égal à 1.

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}.$$

Propriétés

$\mathbb{U}$ est stable par produit et par passage à l'inverse.
Autrement dit, pour tous nombres z et z' de $\mathbb{U}$,

- $zz' \in \mathbb{U}$.
- $\dfrac{1}{z} \in \mathbb{U}$.

Démonstration

C'est une conséquence directe des propriétés précédentes.

En effet, si z et z' appartiennent à $\mathbb{U}$, alors

$$|z| = |z'| = 1$$

et donc

$$|zz'| = |z| \times |z'| = 1 \times 1 = 1.$$

Ainsi, $zz' \in \mathbb{U}$.
De plus,

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{1} = 1$$

donc $\dfrac{1}{z} \in \mathbb{U}$.

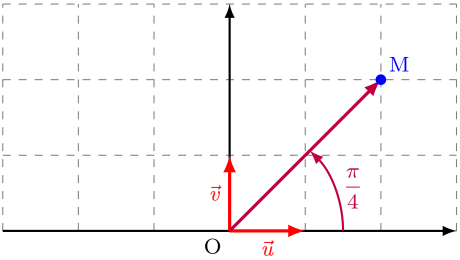
III. Arguments d'un nombre complexe

Définition

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe d'image M dans le plan d'Argand-Cauchy.

On désigne par *arguments* tous les angles (exprimés en radians) $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.

Exemple



Un argument du nombre complexe $z = 2 + 2i$ est $\dfrac{\pi}{4}$.

On notera alors : $\quad \arg(z) = \dfrac{\pi}{4} \mod 2\pi$

ou $\arg(z) = \dfrac{\pi}{4} \quad [2\pi]$

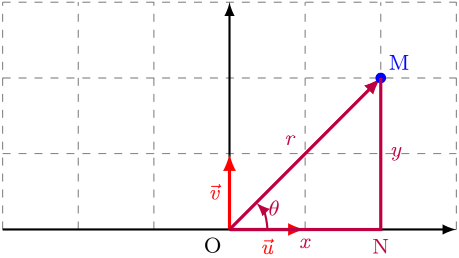
pour désigner le fait que l'angle est défini à 2π près.

Propriété

Soit $z = x + iy$. On note $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$. Alors,

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} .$$

Démonstration



Dans le triangle OMN, rectangle en N, on a :

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \iff x = r\cos\theta.$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \iff y = r\sin\theta.$$

Définition

Soit z un nombre complexe de module r et dont un argument est égal à θ.
La *forme trigonométrique* de z est : $z = r\big(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\big)$.

Propriété

Pour tous nombres complexes z et z',

1. $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$
2. $\arg\left(z^n\right) = n \times \arg(z)$
3. $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$

Démonstration

Posons : $z = r\big(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\big)$ et $z' = r'\big(\cos\theta' + \mathrm{i}\sin\theta'\big)$.

1. En développant, on obtient :

$$\begin{aligned} zz' &= rr'\big(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\big)\big(\cos\theta' + \mathrm{i}\sin\theta'\big) \\ &= rr'\left(\cos\theta\cos\theta' + \mathrm{i}\sin\theta'\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\cos\theta' + \mathrm{i}^2\sin\theta\sin\theta'\right) \\ &= rr'\left(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + \mathrm{i}(\sin\theta'\cos\theta + \sin\theta\cos\theta')\right). \end{aligned}$$

Or, selon les résultats de l'exercice 9, nous avons :
$\cos(\theta+\theta') = \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta')$,
et $\sin(\theta+\theta') = \sin(\theta)\cos(\theta') + \cos(\theta)\sin(\theta')$.
Ainsi, $zz' = rr'\left(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')\right)$.
Par conséquent, $arg(zz') = arg(z) + arg(z')$.

2. Démontrons par récurrence sur n que $\arg(z^n) = n\arg(z)$.
   - **Initialisation :** Pour $n = 1$, $\arg(z^1) = 1 \times \arg(z)$.
   - **Hérédité :** supposons que pour un entier k fixé, $\arg(z^k) = k\arg(z)$. Alors,

$$\begin{aligned}\arg(z^{k+1}) &= \arg(z^k \times z^1)\\ &= \arg(z^k) + \arg(z) \text{ d'après le point 1 précédemment démontré}\\ &= k\arg(z) + \arg(z) \text{ d'après l'hypothèse de récurrence}\\ &= (k+1)\arg(z).\end{aligned}$$

   L'hérédité est alors vérifiée.
   D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, $\arg(z^n) = n\arg(z)$.

3. Posons : $Z = \dfrac{z}{z'}$. Ainsi, $z = Zz'$.
   Or, selon la première propriété $\arg(z) = \arg(Zz') = \arg(Z) + \arg(z')$.
   Ce qui entraine, $\arg(Z) = \arg(z) - \arg(z')$.
   Par conséquent, $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$.

IV. Forme exponentielle d'un nombre complexe

La dernière formule trouvée pour l'argument d'un produit n'est pas sans rappeler les exponentielles, puisque le produit de deux exponentielles est égal à l'exponentielle de la somme. C'est pour cette raison que l'on introduit la notation suivante.

Définition

Soit z un nombre complexe. On note $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$.
La *forme exponentielle* de z est :

$$z = re^{\mathrm{i}\theta}.$$

Remarque

Ainsi, on a :

$$\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta = e^{\mathrm{i}\theta}.$$

Cette égalité est très importante.

Propriété

Pour tous nombres complexes $z = re^{\mathrm{i}\theta}$ et $z' = r'e^{\mathrm{i}\theta'}$, $r' \neq 0$:

1. $zz' = rr'e^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}$.
2. $z^n = r^n e^{n\mathrm{i}\theta}$.
3. $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{r}{r'}e^{\mathrm{i}(\theta-\theta')}$.

Démonstration

Pour tous nombres complexes $z = re^{\mathrm{i}\theta}$ et $z' = r'e^{\mathrm{i}\theta'}$, $r' \neq 0$:

1.
$$\begin{aligned} zz' &= re^{\mathrm{i}\theta} \times r'e^{\mathrm{i}\theta'} \\ &= rr'e^{\mathrm{i}\theta}e^{\mathrm{i}\theta'} \\ &= rr'e^{\mathrm{i}\theta+\mathrm{i}\theta'} \\ &= rr'e^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}. \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} z^n &= \left(re^{\mathrm{i}\theta}\right)^n \\ &= re^{\mathrm{i}\theta \times n} \\ &= re^{n\mathrm{i}\theta}. \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} \frac{z}{z'} &= \frac{re^{\mathrm{i}\theta}}{r'e^{\mathrm{i}\theta'}} \\ &= \frac{r}{r'}\frac{e^{\mathrm{i}\theta}}{e^{\mathrm{i}\theta'}} \\ &= \frac{r}{r'}e^{\mathrm{i}\theta-\mathrm{i}\theta'} \\ &= \frac{r}{r'}e^{\mathrm{i}(\theta-\theta')}. \end{aligned}$$

a) Formules d'Euler

Propriété

Pour tout réel θ, on a :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Démonstration

On sait que :

$$\begin{cases} \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta} \\ \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta} \end{cases}.$$

En additionnant les deux lignes, on obtient :

$$2\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta} \qquad \text{soit} \qquad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}.$$

En soustrayant la seconde ligne à la première, on obtient :

$$2i\sin\theta = e^{i\theta} - e^{-i\theta} \qquad \text{soit} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

b) Formules d'addition et de duplication

Propriété

Pour tous réels a et b,

1. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.
2. $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$.

Démonstration

Utilisons les formules d'Euler pour calculer :

1.
$$\begin{aligned}
&\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)\\
&= \frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2} \times \frac{e^{ib}+e^{-ib}}{2} - \frac{e^{ia}-e^{-ia}}{2i} \times \frac{e^{ib}-e^{-ib}}{2i}\\
&= \frac{e^{i(a+b)}+e^{i(a-b)}+e^{i(-a+b)}+e^{i(-a-b)}}{4} - \frac{e^{i(a+b)}-e^{i(a-b)}-e^{i(-a+b)}+e^{i(-a-b)}}{-4}\\
&= \frac{2e^{i(a+b)}+2e^{i(-a-b)}}{4} = \frac{e^{i(a+b)}+e^{-i(a+b)}}{2} = \cos(a+b).
\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}
&\sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)\\
&= \frac{e^{ia}-e^{-ia}}{2i} \times \frac{e^{ib}+e^{-ib}}{2} + \frac{e^{ib}-e^{-ib}}{2i} \times \frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2}\\
&= \frac{e^{i(a+b)}+e^{i(a-b)}-e^{i(-a+b)}-e^{i(-a-b)}}{4i} + \frac{e^{i(b+a)}+e^{i(b-a)}-e^{i(-b+a)}-e^{i(-b-a)}}{4i}\\
&= \frac{2e^{i(a+b)}-2e^{i(-a-b)}}{4i} = \frac{e^{i(a+b)}-e^{-i(a+b)}}{2i} = \sin(a+b).
\end{aligned}$$

Propriété

Pour tout nombre réel a,

1. $$\begin{aligned}\cos(2a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a)\\ &= 2\cos^2(a) - 1\\ &= 1 - 2\sin^2(a).\end{aligned}$$
2. $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$.

Démonstration

Dans les formules d'addition, on prend $b = a$, ce qui donne :

1. $\cos(2a) = \cos(a+a) = \cos(a)\cos(a) - \sin(a)\sin(a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$.
   On n'oublie pas que $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$, donc :
   - $\sin^2(a) = 1 - \cos^2(a)$; ainsi,
     $$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = \cos^2(a) - \left(1 - \cos^2(a)\right) = 2\cos^2(a) - 1.$$
   - $\cos^2(a) = 1 - \sin^2(a)$; ainsi,
     $$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = \left(1 - \sin^2(a)\right) - \sin^2(a) = 1 - 2\sin^2(a).$$
2. $\sin(2a) = \sin(a+a) = \sin(a)\cos(a) + \cos(a)\sin(a) = 2\sin(a)\cos(a)$.

c) Formule de Moivre

Propriété

Pour tout entier relatif n, pour tout réel θ,

$$\big(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\big)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta).$$

Démonstration

$$\begin{aligned}\big(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\big)^n &= \left(e^{\mathrm{i}\theta}\right)^n \\ &= e^{n\theta\mathrm{i}} \\ &= \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta).\end{aligned}$$

V. Équations polynomiales complexes

Propriété

Soient z et a deux nombres complexes, et soit n un entier naturel non nul. Alors,

$$z^n - a^n = (z-a)\sum_{k=0}^{n-1} a^k z^{n-k-1}.$$

Démonstration : Développons.

$$\begin{aligned}
(z-a)\sum_{k=0}^{p-1} a^k z^{p-k-1} &= z\sum_{k=0}^{p-1} a^k z^{p-k-1} - a\sum_{k=0}^{p-1} a^k z^{p-k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} a^k z^{p-k-1} \times z^1 - \sum_{k=0}^{p-1} a^k \times a^1 z^{p-k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} a^k z^{p-k} - \sum_{k=0}^{p-1} a^{k+1} z^{p-k-1} \\
&= \left(a^0 z^p + a^1 z^{p-1} + a^2 z^{p-2} + \cdots + a^{p-1} z^1\right) \\
&\qquad - \left(a^1 z^{p-1} + a^2 z^{p-2} + a^3 z^{p-3} + \cdots + a^{p-1} z^1 + a^p z^0\right).
\end{aligned}$$

Tous les termes s'éliminent deux à deux sauf le premier et le dernier :

$$\begin{aligned}
(z-a)\sum_{k=0}^{p-1} a^k z^{p-k-1} a^0 z^p - a^p z^0 \\
= z^p - a^p.
\end{aligned}$$

Exemple

On peut factoriser $z^4 - 16$ sous la forme :

$$z^4 - 2^4 = (z-2)(z^3 + 2z^2 + 4z + 8).$$

Définition

On note $\mathbb{C}_n[z]$ l'ensemble des polynômes de degré n à coefficients complexes :

$$\mathbb{C}_n[z] = \left\{ c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0 \ , \ c_k \in \mathbb{C}, \ , \ 0 \leqslant k \leqslant n \right\}.$$

Si un polynôme P, à variable z, est de degré n et est à coefficients complexes, on écrira :

$$P \in \mathbb{C}_n[z].$$

Propriété (admise)

Soit $P \in \mathbb{C}_n[z]$.

$$P(a) = 0 \iff P(z) = (z-a)\,Q(z) \quad , \quad Q \in \mathbb{C}_{n-1}[z].$$

Exemple

Soit $P(z) = 3z^3 - 5z^2 + 7z - 5$.

$$P(1) = 3 \times 1^3 - 5 \times 1^2 + 7 \times 1 - 5 = 0.$$

Par conséquent, on peut écrire :

$$P(z) = (z - 1)(az^2 + bz + c).$$

Pour trouver les valeurs de a, b et c, on développe la forme factorisée :

$$P(z) = az^3 + bz^2 + cz - az^2 - bz - c$$

puis on regroupe les termes de mêmes puissances :

$$P(z) = az^3 + (b - a)z^2 + (c - b)z - c$$

et enfin, on identifie les coefficients de chaque puissance de z à ceux de la forme développée initiale :

$$\begin{cases} a & = 3 \\ b - a & = -5 \\ c - b & = 7 \\ -c & = -5 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \\ c = 5 \end{cases}$$

Finalement, on peut écrire :

$$P(z) = (z - 1)(3z^2 - 2z + 5).$$

Théorème

Tout polynôme de degré n admet au plus n racines complexes.

Démonstration

Nous allons ici démontrer que tout polynôme de degré n admet un nombre de racines inférieur ou égal à n.

Soit $P(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$ un polynôme de $C_n[z]$.

Supposons qu'il existe $n+1$ racines à P, et notons-les r_1, r_2, ... , r_{n+1}.
Alors, $P(z) = c_n(z - r_1)(z - r_2)\cdots(z - r_n)(z - r_{n+1})$.
Or, en développant, on obtient un terme dépendant de z^{n+1}, ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle $P \in \mathbb{C}_n[z]$.

Par conséquent, il y a moins de $n+1$ racines à P.

Remarque

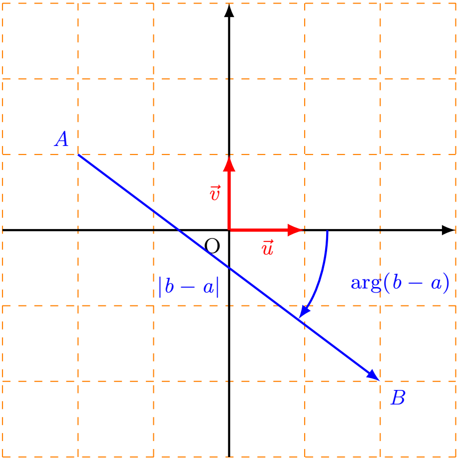
Il existe des cas où les racines sont *multiples*.
Par exemple, $(z-1)^3$ est un polynôme de degré 3 qui n'admet que 1 comme racine. Mais comme le facteur $z-1$ apparaît trois fois dans la factorisation, on dit que la racine « 1 » est triple.

VI. Distance et angles

Propriété

On se place dans le plan d'Argand-Cauchy. Soient A et B d'affixes respectives a et b.

- $|b-a| = AB$;
- $\arg(b-a) = (\vec{u}; \overrightarrow{AB})$.



Démonstration

- Posons : $a = x_A + iy_A$ et $b = x_B + iy_B$. Ainsi,

$$\begin{aligned} |b-a| &= |x_B - x_A + i(y_B - y_A)| \\ &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ &= AB. \end{aligned}$$

- On sait que $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$. On considère le point M d'affixe $z_B - z_A$.
  Ainsi, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$ et $(\vec{u}; \overrightarrow{OM}) = (\vec{u}; \overrightarrow{AB}) + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
  Or, $(\vec{u}; \overrightarrow{OM}) = \arg(z_B - z_A) + 2k'\pi$ avec $k' \in \mathbb{Z}$.
  Par conséquent, $(\vec{u}; \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A) + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

VII. Quotient de deux complexes

Propriété

Soient a, b et c trois nombres complexes, affixes respectives des points A, B et C dans le plan d'Argand-Cauchy.

- $\left|\dfrac{c-a}{b-a}\right| = \dfrac{AC}{AB}$;
- $\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.

Démonstration

- $\left|\dfrac{c-a}{b-a}\right| = \dfrac{|c-a|}{|b-a|} = \dfrac{AC}{AB}$.
- $$\begin{aligned}\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) &= \arg(c-a) - \arg(b-a)\\ &= (\vec{u}; \overrightarrow{AC}) - (\vec{u}; \overrightarrow{AB})\\ &= (\overrightarrow{AB}; \vec{u}) + (\vec{u}; \overrightarrow{AC})\\ &= (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}).\end{aligned}$$

Exemple

Soient $a = -4 + \mathrm{i}$, $b = 3 - 3\mathrm{i}$ et $c = 7 + 4\mathrm{i}$ les affixes respectives de trois points A, B et C dans le plan d'Argand-Cauchy. Quelle est la nature du triangle ABC ?

Calculons $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA})$.

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) &= \arg\left(\frac{a-b}{c-b}\right)\\ &= \arg\left(\frac{-7+4\mathrm{i}}{4+7\mathrm{i}}\right)\\ &= \arg\left(\frac{-7+4\mathrm{i}}{4+7\mathrm{i}} \times \frac{4-7\mathrm{i}}{4-7\mathrm{i}}\right)\\ &= \arg\left(\frac{65\mathrm{i}}{65}\right)\\ &= \arg(\mathrm{i})\\ &= \frac{\pi}{2} \quad [2\pi].\end{aligned}$$

De plus,

$$\left|\frac{a-b}{c-b}\right| = |\mathrm{i}| = 1$$

donc $BC = AB$.

On peut alors conclure que le triangle ABC est rectangle et isocèle en B.

VIII. Racines n-ième de l'unité

Définition

Soit n un entier naturel. On appelle *racines n-ième* de l'unité tous les nombres complexes z tels que $z^n = 1$.

On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble de toutes ces valeurs :

$$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} | z^n = 1\}.$$

Pour construire $\mathbb{U}_n$, il est nécessaire de voir « 1 » comme un nombre complexe, et non plus comme un nombre réel.

Propriété

Soit n un entier naturel.

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}} \text{ , } k \in [\![0 \text{ ; } n-1]\!] \right\}$$

Démonstration

Notons que $1 = e^{2\mathrm{i}k\pi}$ pour tout entier relatif k ; par conséquent,

$$\begin{aligned} z^n = 1 &\iff \forall k \in \mathbb{Z},\ z^n = e^{2\mathrm{i}k\pi} \\ &\iff \forall k \in \mathbb{Z},\ \left(z^n\right)^{\frac{1}{n}} = \left(e^{2\mathrm{i}k\pi}\right)^{\frac{1}{n}} \\ &\iff \forall k \in \mathbb{Z},\ z = e^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}. \end{aligned}$$

De plus,

$$\forall k \in \mathbb{Z}, e^{\frac{2\mathrm{i}(k+n)\pi}{n}} = e^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}} \times e^{\frac{2\mathrm{i}n\pi}{n}} = e^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}} \times \underbrace{e^{2\mathrm{i}\pi}}_{=1} = e^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}.$$

Par conséquent,

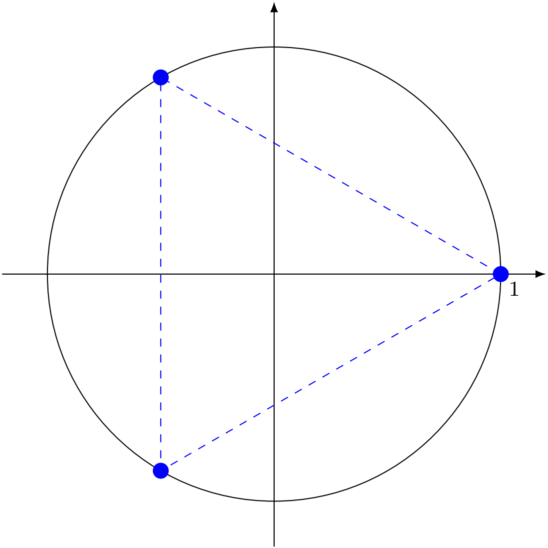
$$z^n = 1 \iff \forall 0 \leqslant k \leqslant n-1,\ z = e^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}.$$

Exemples

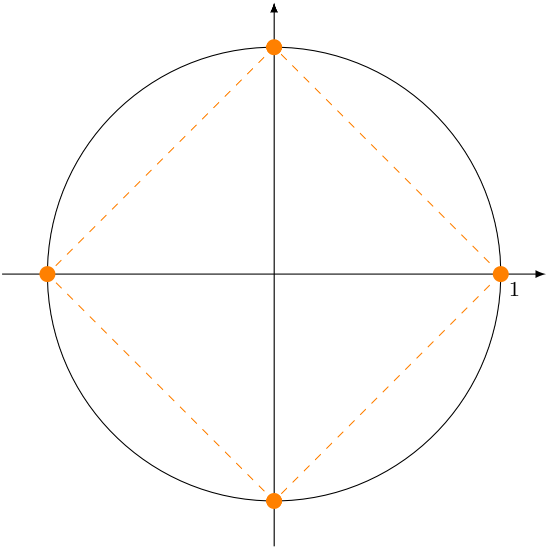
On a ainsi :

- $\mathbb{U}_2 = \left\{1\,;\ e^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{2}}\right\} = \{1\,;\,-1\}$.
- $\mathbb{U}_3 = \left\{1\,;\ e^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}\ ;\ e^{\frac{4\mathrm{i}\pi}{3}}\right\}$.
- $\mathbb{U}_4 = \left\{1\,;\ e^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{4}}\ ;\ e^{\frac{4\mathrm{i}\pi}{4}}\ ;\ e^{\frac{6\mathrm{i}\pi}{4}}\right\} = \{1\,;\,\mathrm{i}\,;\,-1\,;\,-\mathrm{i}\}$.

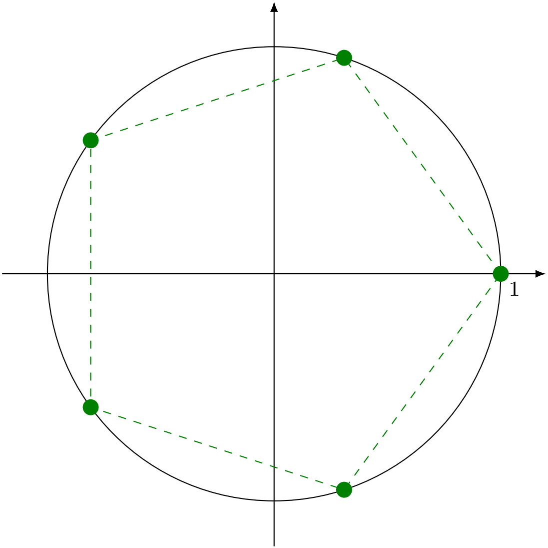
On peut représenter $\mathbb{U}_n$ à l'aide d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité :



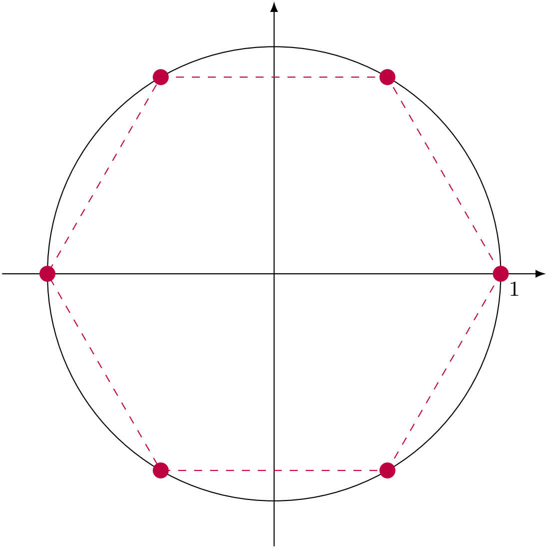
$\mathbb{U}_3$: triangle équilatéral



$\mathbb{U}_4$: carré



$\mathbb{U}_5$: pentagone régulier



$\mathbb{U}_6$: hexagone régulier