Nombres complexes
Point de vue algébrique

Maths Expertes

https://maths-mde.fr

Lycée Evariste Galois

Introduction historique

Activité - Corrigé

Tout commence avec la résolution de l'équation :

$$x^3 = 15x + 4.$$

Au XVIe siècle, en 1545 plus exactement, Jérôme Cardan, un mathématicien italien, a travaillé « dur » pour établir une formule qui pourrait donner une solution à toute équation de la forme $x^3 = px + q$. Il s'agit de la formule suivante :

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}.$$

Si l'on considère l'équation que l'on souhaite résoudre, on prend $p = 15$ et $q = 4$, puis on applique cette formule :

$$x = \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{\frac{4^2}{4} - \frac{15^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{4}{2} + \sqrt{\frac{4^2}{4} - \frac{15^3}{27}}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} - \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-121}}. \quad (1)$$

Diantre ! Nous avons affaire à $\sqrt{-121}$... Cette formule serait-elle fausse ?
Qu'à cela ne tienne !
Le grand mathématicien est sûr de sa formule ! Il décide alors d'aller au-delà de ces connaissances contemporaines et créer une nouvelle mathématique dans laquelle, il est possible calculer une racine carrée d'un nombre négatif !

Pour cela, il commence par considérer que $\sqrt{-1}$ existe, et il le note « i » de sorte que $\mathrm{i}^2 = -1$.
Alors,

$$\sqrt{-121} = \sqrt{121 \times \mathrm{i}^2} = \sqrt{(11\mathrm{i})^2} = 11\mathrm{i}.$$

Ainsi,

$$(1) \iff x = \sqrt[3]{2 + 11\mathrm{i}} - \sqrt[3]{-2 + 11\mathrm{i}}.$$

Par intuition, en appliquant les mêmes règles de calculs déjà connus, et utilisant la distributivité pour développer, il obtient :

$$\begin{aligned}(2+\mathrm{i})^3 &= (2+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})^2\\ &= (2+\mathrm{i})(2^2+4\mathrm{i}+\mathrm{i}^2)\\ &= (2+\mathrm{i})(4+4\mathrm{i}-1)\\ &= (2+\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})\\ &= 6+8\mathrm{i}+3\mathrm{i}+4\mathrm{i}^2\\ &= 6+11\mathrm{i}-4\\ &= 2+11\mathrm{i}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$2+\mathrm{i} = \sqrt[3]{2+11\mathrm{i}}.$$

On démontrerait de même que :

$$-2+\mathrm{i} = \sqrt[3]{-2+11\mathrm{i}}.$$

Finalement,

$$(1) \iff x = 2+\mathrm{i}-(-2+\mathrm{i}) = 4.$$

Fichtre ! Une solution bien réelle alors que nous sommes passés par une mathématique hypothétique en introduisant ce sibyllin nombre i ? Vérifions tout de même si cette valeur est bien solution de l'équation initiale :

$$x^3 = 4^3 = 64 \qquad \text{et} \qquad 15x+4 = 15\times 4+4 = 60+4 = 64.$$

La valeur trouvée est donc bien une solution ! La mathématique créée pour l'occasion s'avère donc utile... Cela mérite développement !
Le nombre i telle que $i^2 = -1$, est alors inventé. Ce nombre n'est bien entendu pas réel.

L'ensemble de nombres obtenus par *combinaison linéaire* du nombre réel « 1 » et du nom *imaginaire* « i », c'est-à-dire des nombres de la forme $a\times 1+b\times \mathrm{i}$, où a et b sont réels, est alors défini.

I. L'ensemble $\mathbb{C}$

Définition

On appelle *nombre complexe* tout nombre de la forme :

$$z = a + \mathrm{i}b$$

où a et b sont deux nombres réels, et où $\mathrm{i}^2 = -1$.
On dira alors que :

- a est la *partie réelle* de z, notée $\Re(z)$;
- b est la *partie imaginaire* de z, noté $\Im(z)$.

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

$$\mathbb{C} = \left\{a + \mathrm{i}b,\ a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}\right\} = \left\{a + \mathrm{i}b,\ \ (a;b) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Attention !

La partie imaginaire ne contient pas le « i ».

Exemples

1. $z_1 = 3 + \mathrm{i}$ est un nombre complexe dont la partie réelle est $a = 3$ et la partie imaginaire est $b = 1$.
2. $z_2 = -\mathrm{i}$ est un nombre complexe dont la partie réelle est $a = 0$ et la partie imaginaire est $b = -1$.
3. $z_3 = 7$ est un nombre complexe dont la partie réelle est $a = 7$ et la partie imaginaire est $b = 0$.

II. Opérations algébriques sur $\mathbb{C}$

Définition

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. On appelle *conjugué* de z le nombre :

$$\overline{z} = a - \mathrm{i}b.$$

Propriété

Pour tout nombre complexe $z = a + \mathrm{i}b$,

$$z \times \overline{z} = a^2 + b^2.$$

Démonstration

En utilisant la troisième identité remarquable, on obtient :

$$\begin{aligned}(a+\mathrm{i}b)(a-\mathrm{i}b) &= a^2 - (\mathrm{i}b)^2 \\ &= a^2 - \mathrm{i}^2 b^2 \\ &= a^2 - (-1)b^2 \\ &= a^2 + b^2.\end{aligned}$$

II. Opérations algébriques sur $\mathbb{C}$

Considérons deux nombres complexes $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = a' + \mathrm{i}b'$. On définit alors :

a. **la somme :** $z + z' = (a + a') + \mathrm{i}(b + b')$;
b. **le produit :** $$z \times z' = (a + \mathrm{i}b)(a' + \mathrm{i}b') = aa' + \mathrm{i}ab' + \mathrm{i}ba' + bb'\mathrm{i}^2 = (aa' - bb') + \mathrm{i}(ba' + ab').$$
c. **l'opposé :** $-z = -a - \mathrm{i}b$;
d. **la différence :** $z - z' = z + (-z') = (a - a') + \mathrm{i}(b - b')$.
e. **l'inverse :** $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \dfrac{a - \mathrm{i}b}{a^2 + b^2} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} - \dfrac{b}{a^2 + b^2}\mathrm{i}$;
f. **le quotient :** $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{z\overline{z'}}{z'\overline{z'}} = \dfrac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + \dfrac{ba' - ab'}{a'^2 + b'^2}\mathrm{i}$.

Remarque

Il n'est pas demandé d'apprendre par cœur ces formules, mais juste de retenir les modes opératoires.

Théorème (unicité)

Soient $a + ib$ et $a' + ib'$ deux nombres complexes écrits sous la forme algébrique.

$$a + ib = a' + b'i \Leftrightarrow a = a' \quad \text{et} \quad b = b'.$$

Démonstration

$\Leftarrow$) Si $a = a'$ et $b = b'$, il est évident que $a + ib = a' + b'i$

$\Rightarrow$) Supposons que $b \neq b'$. Nous avons alors,

$$a + ib = a' + b'i \Rightarrow a - a' = (b' - b)i \Rightarrow i = \frac{a - a'}{b' - b}.$$

Ce qui est absurde, dans la mesure où $\dfrac{a - a'}{b' - b} \in \mathbb{R}$ et $i \in \mathbb{C}$. On déduit donc que $b = b'$.
Par ailleurs, $a + ib = a' + bi \Rightarrow a = a'$.
Par conséquent, l'écriture de la forme algébrique d'un nombre complexe est unique.

Propriétés

Soient z et z' deux nombres complexes, $z' \neq 0$.

1. $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
2. $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ \overline{z^n} = \overline{z}^n$
4. $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
5. $\overline{\overline{z}} = z$
6. $\overline{z} = z \iff z \in \mathbb{R}$
7. $\Re(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$
8. $\Im(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$

Démonstration

Posons $z = a + \mathrm{i}b$ et $z' = a' + \mathrm{i}b'$.

1. $$\begin{aligned}\overline{z+z'} &= \overline{(a+a') + \mathrm{i}(b+b')} \\ &= (a+a') - \mathrm{i}(b+b') \\ &= (a - \mathrm{i}b) + (a' - \mathrm{i}b') \\ &= \overline{z} + \overline{z'}\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}\overline{z \times z'} &= \overline{(a+\mathrm{i}b)(a'+\mathrm{i}b')}\\ &= \overline{(aa'-bb')+i(ab'+ba')}\\ &= (aa'-bb')-\mathrm{i}(ab'+ba').\end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}\overline{z} \times \overline{z'} &= \overline{a+\mathrm{i}b} \times \overline{a'+\mathrm{i}b'}\\ &= (a-\mathrm{i}b)(a'-\mathrm{i}b')\\ &= (aa'-bb')-\mathrm{i}(ab'+ba')\\ &= \overline{z \times z'}.\end{aligned}$$

3. Démontrons l'égalité par récurrence.
   - **Initialisation :** pour $n = 0$, $\overline{z^n} = \overline{z^0} = \overline{1} = 1 = \overline{z}^0$.
   - **Hérédité :** supposons que pour un entier k fixé, $\overline{z^k} = \overline{z}^k$ (HR).

$$\begin{aligned}\overline{z^{k+1}} &= \overline{z^k \times z}\\ &= \overline{z^k} \times \overline{z} \text{ d'après l'item précédent)}\\ &= \overline{z}^k \times \overline{z} \text{ d'après (HR)}\\ &= \overline{z}^{k+1}.\end{aligned}$$

L'hérédité est alors vérifiée.

L'égalité est alors vraie pour $n \in \mathbb{N}$.

4. $$\overline{\frac{1}{z'}} = \frac{a'}{a'^2+b'^2} + \frac{b'}{a'^2+b'^2}\mathrm{i}$$

et
$$\begin{aligned}\frac{1}{\overline{z'}} &= \frac{1}{a'-\mathrm{i}b'} \times \frac{a'+\mathrm{i}b'}{a'+\mathrm{i}b'}\\ &= \frac{a'+\mathrm{i}b'}{a'^2+b'^2}\\ &= \overline{\frac{1}{z'}}.\end{aligned}$$

Ainsi,
$$\begin{aligned}\overline{\frac{z}{z'}} &= \overline{z\times\frac{1}{z'}}\\ &= \overline{z}\times\overline{\frac{1}{z'}} \text{ d'après l'item 2 de cette propriété}\\ &= \overline{z}\times\frac{1}{\overline{z'}} \text{ d'après ce qui a été fait en amont au début de cet item}\\ &= \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}.\end{aligned}$$

5. $\overline{\overline{z}} = \overline{a-\mathrm{i}b} = a+\mathrm{i}b = z.$

6. $\overline{z} - z = (a-\mathrm{i}b) - (a+\mathrm{i}b) = -2\mathrm{i}b.$

Ainsi,
$$\begin{aligned}\overline{z} = z &\iff \overline{z} - z = 0\\ &\iff -2\mathrm{i}b = 0\\ &\iff b = 0\\ &\iff z\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned}\frac{z+\overline{z}}{2} &= \frac{(a+\mathrm{i}b)+(a-\mathrm{i}b)}{2}\\ &= \frac{2a}{2}\\ &= a\\ &= \Re(z).\end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned}\frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}} &= \frac{(a+\mathrm{i}b)-(a-\mathrm{i}b)}{2\mathrm{i}}\\ &= \frac{2b\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}\\ &= b\\ &= \Im(z).\end{aligned}$$

III. Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

Propriété

Soient a et b deux nombres complexes.
L'équation $az + b = 0$, d'inconnue z, admet pour solution dans $\mathbb{C}$:

$$z = -\frac{b}{a}, \quad \text{avec} \quad a \neq 0.$$

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\mathrm{i}z + (1 + \mathrm{i}) = 0$.

$$\begin{aligned} \mathrm{i}z + (1+\mathrm{i}) = 0 &\iff z = -\frac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}} \\ &\iff z = -\frac{1}{\mathrm{i}} - \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}} \\ &\iff z = -\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}^2} - 1 \\ &\iff z = -1 + \mathrm{i}. \end{aligned}$$

Ainsi, $S = \{-1 + i\}$.

Propriété

Soient a, b et c trois nombres réels.
Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux solutions complexes :

$$z_1 = \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b + \mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

Remarque

Dans ce cas, $z_2 = \overline{z_1}$.

Exemple

Le polynôme $z^2 + z + 1$ a pour discriminant $\Delta = -3$, donc ses racines sont :

$$z_1 = \frac{-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}.$$

Démonstration

Si $a = 0$, on retrouve une équation du premier degré $bz + c = 0$ qu'on peut résoudre aisément.
Si $a \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c = 0 &\Leftrightarrow a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow z^2 + 2\frac{b}{2a}z + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0. \end{aligned}$$

Si $\Delta \geqslant 0$, $az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0.$

Ainsi, $S = \left\{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}; \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}.$

Si $\Delta < 0$,

$az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{i\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{i\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right) = 0.$

Ainsi, $S = \left\{\frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}; \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right\}.$

IV. La somme des termes d'une suite géométrique

Propriété

Soit q un nombre complexe. Pour tout nombre entier n, nous avons :

$$q^n - 1 = (q-1)(q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q^2 + q + 1). \tag{1}$$

Démonstration

<u>1ère méthode :</u>

$$\begin{aligned}
& (q-1)(q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q + 1) \\
= \quad & q(q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q + 1) - 1(q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q + 1) \\
= \quad & q^n + \cancel{q^{n-1}} + \cdots + \cancel{q^2} + \cancel{q} - \cancel{q^{n-1}} - \cancel{q^{n-2}} - \cdots - \cancel{q} - 1 \\
= \quad & q^n - 1.
\end{aligned}$$

2ème méthode : Démonstration par récurrence.

Initialisation : Pour $n = 1$, on a $q^1 - 1 = (q-1)(q^{1-1}) = q - 1$.
Hérédité : Supposons que l'égalité (1) est vraie pour un nombre entier n, fixé.
Montrons que l'égalité (1) est vraie pour $n+1$. En effet, pour $q \neq 1$,

$$\begin{aligned} \frac{q^{n+1}-1}{q-1} &= \frac{qq^n - q + q - 1}{q-1} \\ &= q\frac{q^n-1}{q-1} + \frac{q-1}{q-1} \\ &= q(q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q + 1) + 1 \\ &= q^{n+1} + q^{n-1} + \cdots + q + 1. \end{aligned}$$

Ainsi, $q^{n+1} - 1 = (q-1)(q^n + q^{n-1} + \cdots + q + 1)$.
Conclusion : Pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$q^n - 1 = (q-1)(q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q^2 + q + 1).$$

Propriété

Soient a et b deux nombres complexes. Pour tout nombre entier n, nous avons :

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}). \qquad (2)$$

Démonstration

Posons $q = \dfrac{a}{b}$, avec $b \neq 0$. En remplaçant q par $\dfrac{a}{b}$ dans l'égalité (1), on obtient :

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{a}{b}\right)^n - 1 = \left(\frac{a}{b} - 1\right)\left(\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \left(\frac{a}{b}\right)^{n-2} + \cdots + \frac{a}{b} + 1\right) \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{a^n - b^n}{b^n} = \left(\frac{a-b}{b}\right)\left(\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} + \frac{a^{n-2}}{b^{n-2}} + \cdots + \frac{a}{b} + 1\right) \\
\Leftrightarrow \quad & b^n \times \frac{a^n - b^n}{b^n} = b^n \times \left(\frac{a-b}{b}\right)\left(\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} + \frac{a^{n-2}}{b^{n-2}} + \cdots + \frac{a}{b} + 1\right) \\
\Leftrightarrow \quad & a^n - b^n = b^{n-1}(a-b)\left(\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}} + \frac{a^{n-2}}{b^{n-2}} + \cdots + \frac{a}{b} + 1\right) \\
\Leftrightarrow \quad & a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}).
\end{aligned}$$

C.Q.F.D.

V. Formule du binôme de Newton

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle « factorielle » de n le nombre

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n = \prod_{k=1}^{n} k.$$

Par convention, on pose $0! = 1$.

Exemples

$1! = 1$ $\quad 2! = 2$ $\quad 3! = 6$ $\quad 4! = 24$ $\quad 5! = 120$ $\quad 6! = 720$
$7! = 5\ 040$ $\quad 8! = 40\ 320$.

Proposition

$n!$ est le nombre de **permutations** d'un ensemble contenant n éléments.

Exemples

- **Cas $n = 3$:** Il y a $3! = 6$ permutations possibles de 3 éléments.

  123 132 213 231 312 321

- **Cas $n = 4$:** Il y a $4! = 24$ permutations possibles de 24 éléments.

1234	1243	1324	1342	1423	1432
2134	2143	2314	2341	2413	2431
3124	3142	3214	3241	3412	3421
4123	4132	4213	4231	4312	4321

V. Formule du binôme de Newton

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle « factorielle » de n le nombre

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n = \prod_{k=1}^{n} k.$$

Par convention, on pose $0! = 1$.

Exemples

$1! = 1$ $2! = 2$ $3! = 6$ $4! = 24$ $5! = 120$ $6! = 720$
$7! = 5\ 040$ $8! = 40\ 320$.

Proposition

$n!$ est le nombre de **permutations** d'un ensemble contenant n éléments.

Exemples

- **Cas** $n = 3$ **:** Il y a $3! = 6$ permutations possibles de 3 éléments.

  123 132 213 231 312 321

- **Cas** $n = 4$ **:** Il y a $4! = 24$ permutations possibles de 24 éléments.

1234	1243	1324	1342	1423	1432
2134	2143	2314	2341	2413	2431
3124	3142	3214	3241	3412	3421
4123	4132	4213	4231	4312	4321

V. Formule du binôme de Newton

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle « factorielle » de n le nombre
$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n = \prod_{k=1}^{n} k.$
Par convention, on pose $0! = 1$.

Exemples

$1! = 1$ $2! = 2$ $3! = 6$ $4! = 24$ $5! = 120$ $6! = 720$
$7! = 5\ 040$ $8! = 40\ 320$.

Proposition

$n!$ est le nombre de **permutations** d'un ensemble contenant n éléments.

Exemples

- **Cas** $n = 3$ **:** Il y a $3! = 6$ permutations possibles de 3 éléments.

  123 132 213 231 312 321

- **Cas** $n = 4$ **:** Il y a $4! = 24$ permutations possibles de 24 éléments.

1234	1243	1324	1342	1423	1432
2134	2143	2314	2341	2413	2431
3124	3142	3214	3241	3412	3421
4123	4132	4213	4231	4312	4321

- $\dfrac{(2n+3)!}{(2n+1)!} = \dfrac{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!}{(2n+1)!} = (2n+3)(2n+1)$.
- $\dfrac{(n+1)!}{(n-2)!} + \dfrac{n!}{(n-1)!} = (n+1)n(n-1) + n = n^3$.

Arrangements (facultatif)

On dispose de n objets discernables. On en prélève successivement p les uns après les autres. Il y a :

- n choix possibles pour prélever le 1er objet ;
- $(n-1)$ choix possibles pour prélever le 2ème objet ;
- $(n-2)$ choix possibles pour prélever le 3ème objet ;
- ...
- $(n-p+1)$ choix possibles pour prélever le $p$ème objet.

On obtient ainsi $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1)$ prélèvements possibles, soit $\dfrac{n!}{(n-p)!}$.
C'est le nombre d'**arrangements** de p objets parmi n. On le note A_n^p.

Exemples

Un pronostic de tiercé ordonné (pari hippique) revient à désigner 3 numéros parmi n (effectif total des partants), soit A_n^3.
Pour une course de 10 partants, il y a $A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$ tiercés ordonnés possibles.

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \{0, 1, \cdots, n\}$.
On désigne par *coefficient binomial* « k parmi n » le nombre :

$$C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \text{ et } n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n.$$

Il désigne par exemple le nombre de sous-ensembles à k éléments pris parmi n éléments distincts.

Exemples

- $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins dans l'arbre binaire représentatif d'un schéma de n épreuves de Bernoulli conduisant à p succès.
- $\binom{n}{k}$ est le nombre de prélèvements simultanés (sans remise) de p objets parmi n.

Propriété

Pour tout entier naturel n et pour tout entier $k \leqslant n$,

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

Démonstration

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)!k!} \\
&= \frac{k \times n!}{k \times (n-k+1)!(k-1)!} + \frac{(n-k+1) \times n!}{(n-k+1) \times (n-k)!k!} \\
&= \frac{k \times n!}{(n-k+1)!k!} + \frac{(n-k+1) \times n!}{(n-k+1)!k!} \\
&= \frac{k \times n! + (n-k+1) \times n!}{(n-k+1)!k!} \\
&= \frac{(n+1) \times n!}{(n-k+1)!k!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(n-k+1)!k!} \\
&= \binom{n+1}{k}.
\end{aligned}
$$

À l'aide de cette propriété, nous pouvons « construire » une visualisation des premiers coefficients binomiaux.
Chaque nombre en noir est obtenu en ajoutant le nombre au-dessus et celui qui est à gauche du nombre au-dessus, comme le montre l'exemple du $6 = 3 + 3$ qui illustre l'égalité : $\binom{3}{1} + \binom{3}{2} = \binom{4}{2}$.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
$\vdots$	$\vdots$						$\ddots$

Démonstration

Démontrons cette égalité par récurrence.

- **Initialisation :** $(a+b)^1 = a+b$ et
$$\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}a^k b^{1-k} = \binom{1}{0}a^0b^1 + \binom{1}{1}a^1b^0 = b+a = a+b.$$

- Hérédité : supposons que pour un entier p fixé, $(a+b)^p = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}a^kb^{p-k}$.

  Alors,
$$\begin{aligned}
(a+b)^{p+1} &= (a+b)(a+b)^p\\
&= (a+b)\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}a^kb^{p-k} \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence}\\
&= a\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}a^kb^{p-k} + b\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}a^kb^{p-k}\\
&= \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}a^{k+1}b^{p-k} + \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}a^kb^{p-k+1}\\
&= \sum_{k=1}^{p+1}\binom{p}{k-1}a^kb^{p-(k-1)} + \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}a^kb^{p-k+1}\\
&= \left[\sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k-1}a^kb^{p-k+1} + \binom{p}{p}a^{p+1}b^{p-(p+1-1)}\right]\\
&\qquad + \left[\sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k}a^kb^{p-k+1} + \binom{p}{0}a^0b^{p-0+1}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a+b)^{p+1} &= \sum_{k=1}^{p}\left(\binom{p}{k-1}+\binom{p}{k}\right)a^k b^{n_k+1} + a^{p+1}b^0 + a^0 b^{p+1} \\
&= \sum_{k=1}^{p}\binom{p+1}{k}a^k b^{n_k+1} + a^{p+1} + b^{p+1} \qquad \text{car } \binom{p}{k-1}+\binom{p}{k}=\binom{p+1}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{p}\binom{p+1}{k}a^k b^{n_k+1} + \underbrace{\binom{p+1}{p+1}}_{=1}a^{p+1} + \underbrace{\binom{p+1}{0}}_{=0}b^{p+1} \\
&= \sum_{k=0}^{p+1}\binom{p+1}{k}a^k b^{n_k+1}.
\end{aligned}$$

L'égalité est alors vraie au rang $p+1$. L'hérédité est alors vérifiée.

Propriété

$$i^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 4k \\ \mathrm{i} & \text{si } n = 4k+1 \\ -1 & \text{si } n = 4k+2 \\ -\mathrm{i} & \text{si } n = 4k+3 \end{cases}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Démonstration

Raisonnons par disjonction de cas sur n :

- si $n = 4k$, $\mathrm{i}^n = \mathrm{i}^{4k} = (\mathrm{i}^4)^k = \left[(\mathrm{i}^2)^2\right]^k = \left[(-1)^2\right]^k = \left[1\right]^k = 1$.
- si $n = 4k+1$, $\mathrm{i}^n = \mathrm{i}^{4k+1} = \mathrm{i}^{4k} \times \mathrm{i}^1 = 1 \times \mathrm{i} = \mathrm{i}$.
- si $n = 4k+2$, $\mathrm{i}^n = \mathrm{i}^{4k+1} \times \mathrm{i}^1 = \mathrm{i} \times \mathrm{i} = -1$.
- si $n = 4k+3$, $\mathrm{i}^n = \mathrm{i}^{4k+2} \times \mathrm{i}^1 = -1 \times \mathrm{i} = -\mathrm{i}$.

Propriété

Soit $z = a + \mathrm{i}b$ un nombre complexe, et soit n un entier naturel. Alors,

$$\begin{aligned} z^n &= (a+\mathrm{i}b)^n \\ &= \sum_{\substack{k=4p \\ k\leqslant n}} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k - \sum_{\substack{k=4p+2 \\ k\leqslant n}} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\ &\qquad + \mathrm{i}\left(\sum_{\substack{k=4p+1 \\ k\leqslant n}} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k - \sum_{\substack{k=4p+3 \\ k\leqslant n}} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right) \end{aligned}$$

où $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, avec $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n$.

Exemple : Calculons $(2+3\mathrm{i})^6$.

$$\begin{aligned}(2+3\mathrm{i})^6 = &\sum_{\substack{k=4p\\k\leqslant 6}}\binom{6}{k}2^{6-k}3^k - \sum_{\substack{k=4p+2\\k\leqslant 6}}\binom{6}{k}2^{6-k}3^k\\ &+\mathrm{i}\left(\sum_{\substack{k=4p+1\\k\leqslant 6}}\binom{6}{k}2^{6-k}3^k - \sum_{\substack{k=4p+3\\k\leqslant 6}}\binom{6}{k}2^{6-k}3^k\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2+3\mathrm{i})^6 &= \binom{6}{0}2^6 3^0 + \binom{6}{4}2^{6-4}3^4 - \binom{6}{2}2^{6-2}3^2 + \binom{6}{6}2^{6-6}3^6\\ &\quad + \mathrm{i}\left(\binom{6}{1}2^{6-1}3^1 + \binom{6}{5}2^{6-5}3^5 - \binom{6}{3}2^{6-3}3^3\right)\\ &= 1\times 2^6 + 15\times 2^2\times 3^4 - 15\times 2^4\times 3^2 + 1\times 3^6\\ &\quad + \mathrm{i}\left(6\times 2^5\times 3 + 6\times 2^1\times 3^5 - 20\times 2^3\times 3^3\right)\\ &= 4\,924 - 2\,889 + \mathrm{i}(3\,492 - 4\,320)\\ &= 2035 - 828\mathrm{i}.\end{aligned}$$