Matrices

Maths Expertes

maths-mde.fr
Cours à imprimer pour élève

Lycée Évariste Galois

I. Introduction

Dans divers domaines (mathématiques, SVT, science sociale et sciences physiques par exemple), certaines situations peuvent être représentées de façons schématique par un tableau de nombre.
En algèbre, le système linéaire :

$$\begin{cases} 3x+5 & = -1 \\ 2x-7y & = 11 \end{cases}.$$

peut être représenté par les tableaux :

3	5
2	-7

et

-1
11

Le premier représente les coefficients respectifs de x et y et le second, les constantes à droite des signes « = ».
De tels tableaux sont appelés des *matrices*.
En général, on notera une matrice sans les traits du tableau, le tout entre parenthèses.
Les matrices correspondant au système de l'exemple précédente sont :

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Exemple

Soit une matrice A ayant n lignes et m colonnes, $n \neq 0$ et $m \neq 0$.
On dira que $n \times m$ sont les dimensions de la matrice A.

- Si $n = 1$, on dira que A est une matrice ligne.
- Si $m = 1$, on dira que A est une matrice colonne.
- Si $n = m$, on dira que A est une matrice carrée.

On pourra noter une matrice :

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant m}} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{bmatrix}.$$

une matrice de dimensions $n \times m$, ou plus simplement : $A = (a_{i,j})$, avec $\dim(A) = n \times m$.

II. Opérations sur les matrices

Somme et différence

Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices de mêmes dimensions $\dim(A) = \dim(B) = n \times m$.
On définit la somme de A et B par la matrice :

$$S = A + B = (a_{i,j} + b_{i,j}) \qquad , \qquad \dim(S) = n \times m$$

et leur différence par la matrice :

$$D = A - B = (a_{i,j} - b_{i,j}) \qquad , \qquad \dim(S) = n \times m.$$

Exemple

Posons $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et B $= \begin{pmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ deux matrices de dimensions 2×3.
Elles ont les mêmes dimensions donc on peut les ajouter :

$$S = A + B = \begin{pmatrix} 3+5 & -1+7 & 5+(-5) \\ -5+4 & 2+(-4) & 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 0 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

et les soustraire :

$$D = A - B = \begin{pmatrix} 3-5 & -1-7 & 5-(-5) \\ -5-4 & 2-(-4) & 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -8 & 10 \\ -9 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Remarque

Quelle que soit la matrice A,

$$A - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette dernière matrice est appelée la *matrice nulle*. C'est une matrice remplie de « 0 ».

Produit d'une matrice par un réel

Soient $A = (a_{i,j})$ une matrice de dimensions $n \times m$ et $k \in \mathbb{R}$. On définit la matrice kA par :

$$kA = (ka_{i,j}) = \begin{pmatrix} ka_{1,1} & ka_{1,2} & \cdots & ka_{1,m} \\ ka_{2,1} & ka_{2,2} & \cdots & ka_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{n,1} & ka_{n,2} & \cdots & ka_{n,m} \end{pmatrix}.$$

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $3A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -12 & 0 \end{pmatrix}$.
On a multiplier tous les coefficients de A par 3.

III. Produit de matrices

Définition

Soient $A = (a_{i,j})$ une matrice $n \times m$, et $B = (b_{i,j})$ une matrice $m \times p$. On définit le produit $A \times B$ par la matrice $C = (c_{i,j})$ de dimensions $n \times p$ telle que $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k} \times b_{k,j}$.

Exemple

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ 11 & -11 \\ 13 & -13 \end{pmatrix}$. Alors,

$$\begin{aligned} & A \times B \\ &= \begin{pmatrix} 1 \times 7 + (-1) \times 11 + 2 \times 13 & 1 \times (-7) + (-1) \times (-11) + 2 \times (-13) \\ 3 \times 7 + (-2) \times 11 + 5 \times 13 & 3 \times (-7) + (-2) \times (-11) + 5 \times (-13) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 22 & -22 \\ 64 & -64 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\dim(A) = 2 \times 3$, $\dim(B) = 3 \times 2$ et $\dim(C) = 2 \times 2$.

Remarque

Le produit matriciel n'est pas commutatif. En effet, $A \times B \neq B \times A$. Cependant, il existe des cas où $A \times B = B \times A$.

Définition

On appelle *matrice identité d'ordre n* la matrice carrée de dimensions $n \times n$:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque

Une matrice identité ne contient que des « 0 » sauf sur la diagonale où il n'y a que des « 1 ».

Définition

On appelle *matrices diagonales* toutes matrices carrées de la forme :

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$

Propriété

Pour toute matrice carrée A d'ordre n,

$$A \times I_n = I_n \times A = A.$$

Remarque

La matrice identité joue le même rôle dans le produit de matrices que le réel « 1 » dans le produit des nombres.
On dit que c'est l'*élément neutre* du produit.

IV. Puissances d'une matrice carrée

Définition

Soit A une matrice carrée d'ordre n. On définit la puissance p-ième de A par :

$$A^p = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{p \text{ facteurs}}$$

en convenant d'avoir : $A^0 = I_n$.

Propriété

Soit $D = (d_i)$ une matrice carrée diagonale d'ordre n. Alors,

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \iff D^p = \begin{pmatrix} a_1^p & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3^p & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n^p \end{pmatrix}.$$

La démonstration peut se faire par récurrence.

V. Matrice inverse d'une matrice carrée

Définition

Soit A une matrice carrée d'ordre n.
On appelle *matrice inverse de* A l'unique matrice, notée A^{-1}, telle que :

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_n.$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 5I_2.$$

On peut alors en déduire que :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

soit,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

On peut alors conclure que :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Remarque

Attention ! Il ya des matrices carrées qui ne possèdent pas d'inverse.
Par exemple, la matrice nulle ne possède pas d'inverse.
On dit dans ce cas que la matrice n'est pas inversible.

Comment trouver l'inverse d'une matrice ?

Considérons le système linéaire :

$$\begin{cases} ax + by = \lambda \\ cx + dy = \mu \end{cases}$$

Il peut être représenté de façon matricielle par :

$$AX = B, \qquad \text{avec} \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}.$$

Or,

$$AX = B \iff A^{-1}AX = A^{-1}B \iff I_2X = A^{-1}B \iff X = A^{-1}B.$$

Ainsi, si on résout le système linéaire, on aura la matrice inverse.

$$\begin{cases} ax + by = \lambda & (L_1) \\ cx + dy = \mu & (L_2) \end{cases} \iff \begin{cases} acx + bcy = \lambda c & (L_1) \leftarrow c \times (L_1) \\ acx + ady = \mu a & (L_2) \leftarrow a \times (L_2) \end{cases}$$

En soustrayant, on obtient :

$$(L_2)-(L_1) \iff (ad-bc)y=\mu a-\lambda c \iff y=\frac{\mu a-\lambda c}{ad-bc}.$$

De même,

$$\begin{cases} ax+by=\lambda & (L_1) \\ cx+dy=\mu & (L_2) \end{cases} \iff \begin{cases} adx+bdy=\lambda d & (L_1)\leftarrow d\times(L_1) \\ bcx+bdy=\mu b & (L_2)\leftarrow b\times(L_2) \end{cases}$$

En soustrayant, on obtient :

$$(L_1)-(L_2) \iff (ad-bc)x=\lambda d-\mu b \iff x=\frac{\lambda d-\mu b}{ad-bc}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d\lambda-b\mu \\ -c\lambda+a\mu \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}B. \end{aligned}$$

Or,

$$X=A^{-1}B$$

donc :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Bien sûr, il est ici nécessaire que $ad - bc \neq 0$.

Propriété

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $ad - bc \neq 0$.
Alors, l'inverse de A est :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Résolution de systèmes linéaires

Considérons un système linéaire de n équations à n inconnues x_1, x_2,... , x_n :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

Alors, ce système peut être écrit de façon matricielle sus la forme :

$$AX = B$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, si A est inversible,

$$AX = B \iff \underbrace{A^{-1}A}_{=I_n} X = A^{-1}B \iff X = A^{-1}B.$$

Exemple

Le système :

$$\begin{cases} 3x - 5y & = 13 \\ 4x + 7y & = -10 \end{cases}$$

peut s'écrire :

$$AX = B \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 13 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

A est inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{41} & \frac{5}{41} \\ -\frac{4}{41} & \frac{3}{41} \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,

$$\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} \frac{7}{41} & \frac{5}{41} \\ -\frac{4}{41} & \frac{3}{41} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ -10 \end{pmatrix} = \binom{1}{-2}.$$

VI. Suites numériques imbriquées

Définition

On pose : $U_n = \begin{pmatrix} u_n^{(1)} \\ u_n^{(2)} \\ \vdots \\ u_n^{(p)} \end{pmatrix}$ où les $u_n^{(k)}$ $(1 \leqslant k \leqslant p)$ sont p suites numériques.

Ces p suites sont dites imbriquées s'il existe deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,p} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$$

telles que :

$$U_{n+1} = AU_n + B.$$

Exemple

Les deux suites u_n et v_n définies par :

$$u_0 = a, \ v_0 = b \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + v_n) \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n - v_n) \end{cases}$$

Propriété

Soit un système de suites imbriquées représenté par l'écriture matricielle $U_{n+1} = AU_n$, U_0 étant donné. Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad U_n = A^n U_0.$$

Exemple

Si on reprend les suites de l'exemple précédent, alors :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

On peut démontrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

- $A^{2n} = \dfrac{1}{2^{2n}} \times 2^n I_2 = \dfrac{1}{2^n} I_2$;
- $A^{2n+1} = \dfrac{1}{2^{2n+1}} \times 2^n A = \dfrac{1}{2^{n+1}} A$.

Ainsi, pour tout entier naturel n,

- $U_{2n} = \dfrac{1}{2^n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$;
- $U_{2n+1} = \dfrac{1}{2^{p+1}} \begin{pmatrix} a+b \\ a-b \end{pmatrix}$.