Graphes

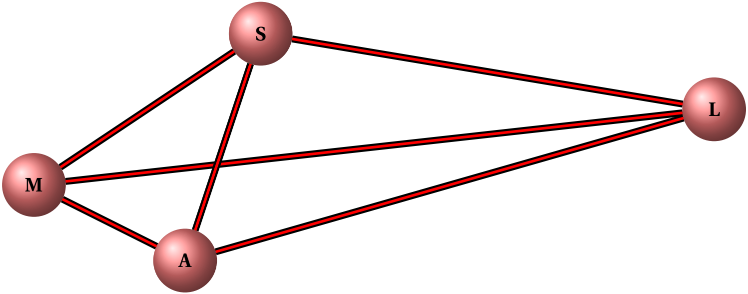
Maths Expertes

maths-mde.fr
Cours à imprimer pour élève

Lycée Evariste Galois

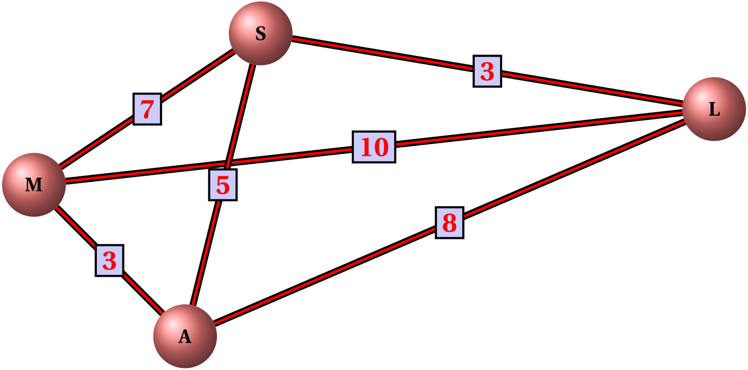
I. Introduction

Maria doit partir de son domicile pour aller chez Sara, Lucie et Aude. Elle souhaite schématiser les différents parcours. Pour cela, elle peut utiliser le schéma suivant :



Ce schéma lui montre tous les chemins qu'elle peut emprunter.

De plus, si elle connaît les distances entre chacune des maisons, elle peut les reporter dessus :



Cette représentation est appelée *graphe*.

II. Vocabulaire

Définition

Un *graphe* $\mathscr{G}$ est la donnée de deux ensembles : l'un est constitué de points, appelés *sommets*, l'autre est constitué de couples de points, appelés *arêtes*.

Exemple

Dans l'exemple précédent, $\mathscr{G} = (\mathscr{S}; \mathscr{A})$ où :

- $\mathscr{S} = \{M; A; S; L\}$;
- $\mathscr{A} = \{(M; S), (M; L), (M; A), (A; S); (A; L); (S; L)\}$.

Remarque

Il ne faut pas confondre « graphe » (donnée formelle) et « représentation d'un graphe » (plus visuelle que le graphe lui-même).

Définition

Dans un graphe, deux sommets sont dits *adjacents* s'il existe une arête entre eux.

Exemple

Dans l'exemple précédent, tous les sommets sont adjacents car il existe une arête entre chacun d'eux.

III. Graphe complet

Définition

Une graphe est *complet* si tous les sommets sont adjacents deux à deux.

C'est le cas de notre exemple de départ.

Propriété

Soit $\mathscr{G}$ un graphe complet à n sommets. Alors, le nombre d'arêtes de $\mathscr{G}$ est :

$$K_n = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Démonstration

Numérotons les sommets de 1 à n.

- Le sommet 1 est relié aux $n-1$ autres sommets ; il y a donc $n-1$ arêtes qui partent de ce sommet.
- Le sommet 2 est lui aussi relié à $n-1$ sommets, mais nous avons déjà compté l'arête qui le relie au sommet 1 ; il y a donc $n-2$ arêtes issues du sommet 2, en plus des $n-1$ arêtes précédentes.
- etc. jusqu'au sommet $n-1$ qui est relié au sommet n par une arête.

Ainsi,

$$K_n = (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

IV. Ordre et chaîne d'un graphe

Définition

L'ordre d'un graphe est le nombre de sommets de ce graphe.

Exemple

L'ordre du graphe de notre exemple est égal à 4.

Définition

Une chaîne d'un graphe est une liste ordonnée de sommets adjacents deux à deux.
Le nombre de sommets de cette liste est appelé la *longueur* de la chaîne.

Exemple

Dans l'exemple de départ,

- M – S – A – L est une chaîne de longueur 4.
- A – M – S est une chaîne de longueur 3.

V. Différents types de graphes

Définition

Un graphe est dit *connexe* si deux sommets quelconques de ce graphe peuvent être reliés par au moins une chaîne.

Il est assez facile de voir si un graphe est connexe ou non : si sa représentation comporte au moins un sommet isolé alors il n'est pas connexe.

Définition

Un graphe $\mathscr{G} = (\mathscr{S}; \mathscr{A})$ est *non orienté* si les couples de $\mathscr{A}$ peuvent être inversés.

Exemple

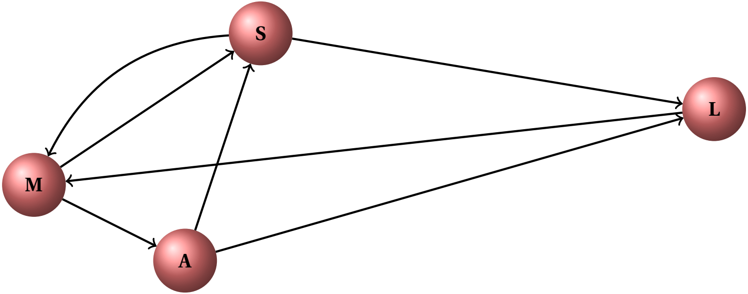
Dans notre exemple précédent, Maria peut aller de la maison de Sara à celle de Lucie, mais aussi de la maison de Lucie à celle de Sara : il n'y a pas de sens imposé. Le graphe représentant la situation est non non orienté.

Définition

Un graphe $\mathscr{G} = (\mathscr{S};\mathscr{A})$ est *orienté* si les couples de $\mathscr{A}$ ne peuvent pas être inversés.

Exemple

Supposons que dans notre exemple de Départ, Maria ne puisse pas aller de S à A mais uniquement de A à S, et qu'il y ait d'autres contraintes du même type.
Supposons que la représentation de la situation soit alors celle-ci :

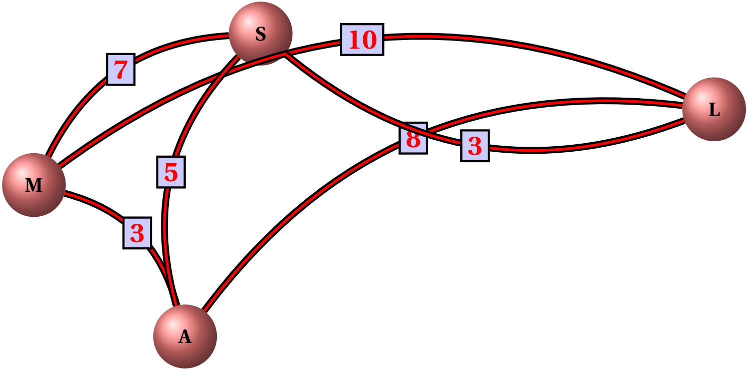


Nous avons alors ici la représentation d'un graphe orienté.

Définition

Un graphe est dit *pondéré* si ses arêtes sont munies de nombres positifs, appelés *étiquettes* ou *pondérations*.

Exemple



Ceci est la représentation d'un graphe pondéré. Ici, les pondérations représente la distance (en kilomètre) entre chaque maison représentées par les sommets.

Définition

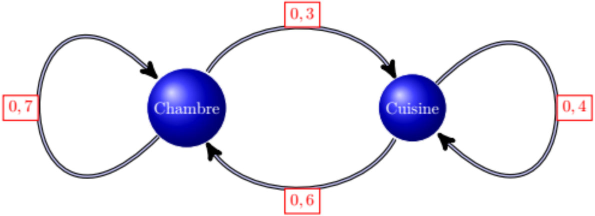
Un graphe probabiliste est un graphe orienté où la somme des pondérations des arêtes issues d'un même sommet est égale à 1.

Exemple

Pendant les vacances, Sara est soit dans sa chambre, soit dans la cuisine.

- Si elle est dans sa chambre, la probabilité qu'elle y soit encore 10 minutes plus tard est égale à 0,7.
- Si elle est dans la cuisine, la probabilité qu'elle y soit encore 10 minutes plus tard est égale à 0,4.

Cette situation peut alors correspondre à un graphe dont une représentation est la suivante :

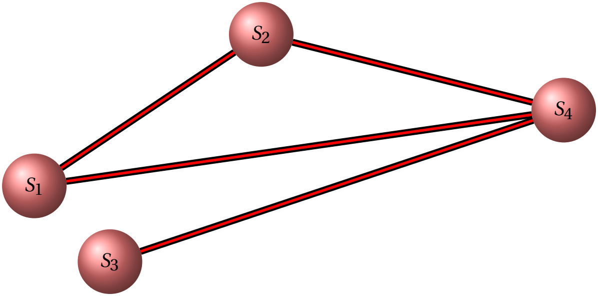


Définition

Soit $\mathscr{G}$ un graphe non pondéré, de sommets S_k, $1 \leqslant k \leqslant n$.
La *matrice d'adjacence* de $\mathscr{G}$ est la matrice $(a_{i,j})$, $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n$ telle que :

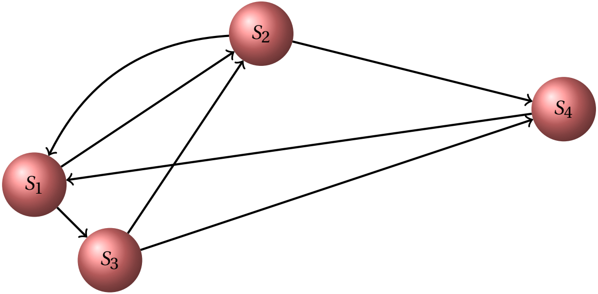
- s'il existe une arête allant de S_i à S_j alors $a_{i,j} = 1$;
- sinon, $a_{i,j} = 0$.

Exemple : Graphe non orienté



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple : Graphe orienté



En convenant de classer les sommets dans cet ordre, on obtient :

$$S_1 - S_3 - S_2 - S_4$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Propriété

La matrice d'adjacence $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ d'un graphe non orienté d'ordre n est symétrique : pour tous i et j compris entre 1 et n,

$$a_{i,j} = a_{j,i}.$$

Propriété

Soit $\mathcal{G}$ un graphe non pondéré d'ordre n de matrice d'adjacence $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$.

On note S_k les sommets de $\mathcal{G}$.

Le nombre de chaînes de longueur k reliant S_i à S_j est le coefficient $c_{i,j}$ de la matrice A^k.

Exemple

On considère le graphe orienté présenté par la matrice A.

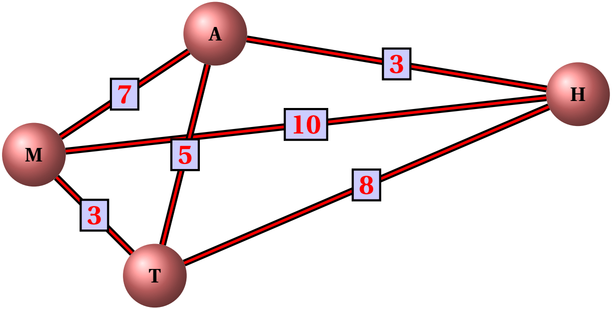
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On en déduit alors qu'il existe une chaîne de longueur 3 reliant S_2 à S_3.

Définition

La matrice $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ d'un graphe pondéré ou probabiliste est la matrice telle que $a_{i,j}$ correspond à la pondération de l'arête reliant le sommet i au sommet j.

Exemple



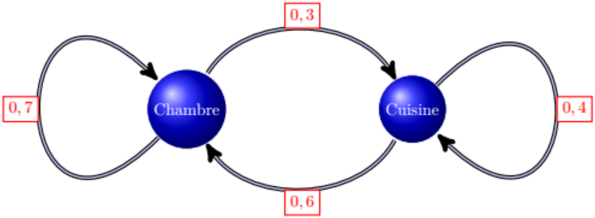
En convenant d'ordonner les sommets de la manière suivante :

$$\mathrm{M}-\mathrm{A}-\mathrm{T}-\mathrm{H}$$

la matrice d'adjacence du graphe ci-contre est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 7 & 3 & 10 \\ 7 & 0 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 0 & 8 \\ 10 & 3 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple : Graphe probabiliste



En convenant d'ordonner les sommets du graphe ci-contre comme ceci :

Chambre – Cuisine

la matrice du graphe ci-contre est :

$$\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

VI. Chaîne de Markov

Définition

Une chaîne de Markov est une suite d'événements $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où chaque X_n ne dépend que de X_{n-1}, pour $n>0$

Définition

Soit $\mathscr{G}$ un graphe probabiliste de matrice M.
L'*état stable* du graphe est la matrice ligne $P=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{pmatrix}$ telle que $P=PM$, avec $\sum_{k=1}^{n} x_k = 1$.

Exemple

L'exemple précedent illustre ce que l'on appelle une *chaîne de Markov* à deux états : « Chambre » et « Cuisine ».
L'état stable de ce graphe est la matrice $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ telle que :

$$\begin{aligned}
P = PM &\iff PI_2 = PM \\
&\iff P(M - I_2) = 0 \\
&\iff \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,7-1 & 0,3 \\ 0,6 & 0,4-1 \end{pmatrix} = 0 \quad , \quad a+b=1 \\
&\iff \begin{cases} -0,3a + 0,6b = 0 \\ a+b=1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = \frac{1}{3} \end{cases}
\end{aligned}$$

L'état stable du graphe est donc $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Cela signifie que la probabilité que Sara soit dans sa chambre est égale à $\dfrac{2}{3}$.