Maths Expertes
maths-mde.fr

Devoir Surveillé n° 4

...../20

Lycée
Evariste Galois

Exercice 1 : (4 points)

1 Déterminer une forme trigonométrique, puis la forme algébrique des deux nombres complexes suivants.

a $z_1 = 4e^{-\frac{27\pi}{4}i}$.

b $z_2 = 3e^{\frac{-7\pi}{3}i}$.

2 Déterminer une forme exponentielle des deux nombres complexes suivants.

a $z_3 = -\dfrac{7}{2} - \dfrac{7\sqrt{3}}{2}i$.

b $z_4 = 3\pi i$.

Exercice 2 : (3 points)

Déterminer dans chaque cas la nature de l'ensemble de points M d'affixe z du plan complexe vérifiant :

1 $|z + 2i| = 3$.

2 $|z - 7 - 4i| = |z - 5 + 2i|$.

Exercice 3 : (5 points)

Les cinq questions sont indépendantes.

1 Déterminer la valeur exacte de $\sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)$.

2 À l'aide de la formule de Moivre, donner la forme algébrique de $(-2 - 2\sqrt{3}i)^6$.

3 À l'aide des formules d'Euler, écrire $\cos^4(x)$ sous la forme d'une expression linéarisée.

4 Trouver tous les nombres complexes z tels que $z^5 = 1$ et donner leur forme exponentielle.

5 Les points A, B, C d'affixes z_A, z_B, z_C sont distincts et alignés, calculer $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$.

Exercice 4 : (8 points)

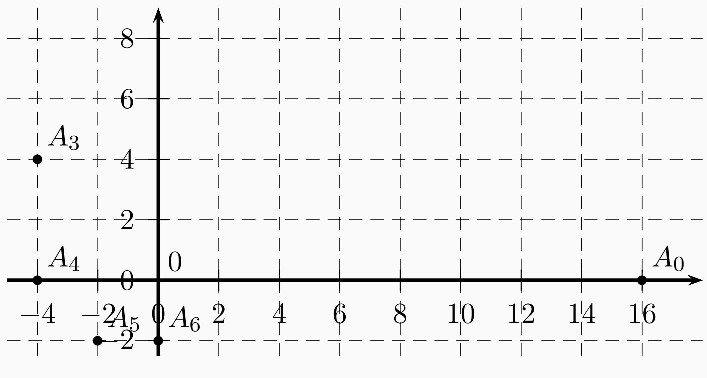
On définit, pour tout entier naturel n, les nombres complexes z par :

$$\begin{cases} z_0 & = & 16 \\ z_{n+1} & = & \dfrac{1+\mathrm{i}}{2} z_n, \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

On note r_n le module du nombre complexe z_n : $r_n = |z_n|$. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé d'origine O, on considère les points A_n d'affixes z_n.

1 **a** Calculer z_1, z_2 et z_3.

b Placer les points A_1 et A_2 sur le plan d'Argand-Cauchy ci-après.



c Écrire le nombre complexe $\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$ sous forme trigonométrique.

d Démontrer que le triangle $\mathrm{O}A_0A_1$ est isocèle rectangle en A_1.

2 Démontrer que la suite (r_n) est géométrique, de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

La suite (r_n) est-elle convergente ?

Interpréter géométriquement le résultat précédent.

On note L_n la longueur de la ligne brisée qui relie le point A_0 au point A_n en passant successivement par les points A_1, A_2, A_3, etc.

Ainsi $L_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} A_iA_{i+1} = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$.

3 **a** Démontrer que pour tout entier naturel n : $A_nA_{n+1} = r_{n+1}$.

b Donner une expression de L_n en fonction de n.

c Déterminer la limite éventuelle de la suite (L_n).