

Exercice 1 : (4 points)

1 On rappelle que : $z = re^{i\theta} = r[\cos(\theta) + i \sin(\theta)]$.

(a) Une forme trigonométrique est donnée par,
 $z_1 = 4 \left[\cos \left(-\frac{27\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{27\pi}{4} \right) \right]$.

Or, le cosinus est une fonction paire et 2π -périodiques, de plus le sinus est une fonction impaire et 2π -périodiques. Donc,

$$\cos \left(-\frac{27\pi}{4} \right) = \cos \left(6\pi + \frac{3\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

et

$$\sin \left(-\frac{27\pi}{4} \right) = -\sin \left(\frac{27\pi}{4} \right) = -\sin \left(6\pi + \frac{3\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Dès lors, la forme algébrique est donnée par,

$$z_1 = 4 \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i.$$

(b) Une forme trigonométrique est donnée par,
 $z_2 = 3 \left[\cos \left(-\frac{7\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{7\pi}{3} \right) \right]$.

$$\text{Or, } \cos \left(-\frac{7\pi}{3} \right) = \cos \left(-2\pi - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{et } \sin \left(-\frac{7\pi}{3} \right) = \sin \left(-2\pi - \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Donc, la forme algébrique est donnée par,

$$z_2 = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i.$$

2 Le mieux est de calculer d'abord le module d'un nombre complexe avant de donner sa forme exponentielle.

(a) Calculons $|z_3|$:

$$|z_3| = \sqrt{\left(-\frac{7}{2} \right)^2 + \left(-\frac{7\sqrt{3}}{2} \right)^2} = \sqrt{49} = 7.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} z_3 &= -\frac{7}{2} - \frac{7\sqrt{3}}{2}i \\ &= 7 \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\ &= 7 \left(\cos \left(-\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right) \right) \\ &= 7e^{-\frac{2\pi}{3}i}. \end{aligned}$$

(b) Calculons $|z_4|$:

$$|z_4| = \sqrt{(3\pi)^2} = 3\pi.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} z_4 &= 3\pi \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \right) \\ &= 3\pi e^{\frac{\pi}{2}i}. \end{aligned}$$

Exercice 2 : (3 points)

1 L'ensemble de points M d'affixe z du plan complexe vérifiant $|z + 2i| = 3$, est le cercle de centre O d'affixe $-2i$ et de rayon 3. En effet, en posant $z = x + iy$, on obtient l'équation du cercle :

$$\begin{aligned} |z + 2i| = 3 &\Leftrightarrow |x + yi + 2i| = 3 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y + 2)^2} = 3 \\ &\Leftrightarrow (x - 0)^2 + (y + 2)^2 = 9. \end{aligned}$$

2 L'ensemble de points M d'affixe z du plan complexe vérifiant $|z - 7 - 4i| = |z - 5 + 2i|$, est la médiatrice du segment $[AB]$, avec A et B les deux points d'affixe respective $7 + 4i$ et $5 - 2i$. On peut déterminer une équation cartésienne de cette droite, en notant $z = x + iy$,

$$\begin{aligned} |z - 7 - 4i| = |z - 5 + 2i| &\Leftrightarrow |x + iy - 7 - 4i| = |x + iy - 5 + 2i| \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x - 7)^2 + (y - 4)^2} = \sqrt{(x - 5)^2 + (y + 2)^2} \\ &\Leftrightarrow (x - 7)^2 + (y - 4)^2 = (x - 5)^2 + (y + 2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |z - 7 - 4i| = |z - 5 + 2i| &\Leftrightarrow x^2 - 14x + 49 + y^2 - 8y + 16 = x^2 - 10x + 25 + y^2 + 4y + 4 \\
 &\Leftrightarrow -12y - 4x + 36 = 0. \quad (*)
 \end{aligned}$$

(*) est une équation cartésienne de la droite (AB).

Exercice 3 : (5 points)

Les cinq questions sont indépendantes.

- 1** On sait que : $\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \cos(a) \sin(b)$. De plus, $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
 \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \\
 &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.
 \end{aligned}$$

Par ailleurs, la fonction sinus est impaire donc, $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

- 2** En utilisant la formule de Moivre $(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 (-2 - 2\sqrt{3}i)^6 &= (2 + 2\sqrt{3}i)^6 \\
 \left(2^2 \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^6 &= (2^2)^6 \times \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6 \\
 &= 2^{12} \times \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^6 \\
 &= 2^{12} \times \left(\cos\left(\frac{\pi}{3} \times 6\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} \times 6\right)\right) \\
 &= 2^{12} \times (\cos(2\pi) + i \sin(2\pi)) \\
 &= 4\,096.
 \end{aligned}$$

- 3** En utilisant la formule d'Euler $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \cos^4(x) &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4 \\
 &= \frac{e^{4ix} + 4e^{3ix}e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} + 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix}}{16} \\
 &= \frac{e^{4ix} + e^{-4ix} + 4e^{2ix} + 4e^{-2ix} + 6}{16} \\
 &= \frac{\cos(4x) + 4\cos(2x) + 3}{8}.
 \end{aligned}$$

- 4** Posons $z = e^{i\theta}$. Ainsi, $z^5 = 1 \Leftrightarrow |z|^5 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$.

Par ailleurs,

$$z^5 = 1 \Leftrightarrow e^{5i\theta} = e^{i(0+2k\pi)}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}.$$

— Si $k = 5p$, alors $z = e^{i \times 2p\pi} = 1$.

— Si $k = 5p + 1$, alors $z = e^{i\left(\frac{2\pi}{5} + 2p\pi\right)} = e^{\frac{2\pi}{5}i}$.
 — Si $k = 5p + 2$, alors $z = e^{i\left(\frac{4\pi}{5} + 2p\pi\right)} = e^{\frac{4\pi}{5}i}$.
 — Si $k = 5p + 3$, alors $z = e^{i\left(\frac{6\pi}{5} + 2p\pi\right)} = e^{\frac{6\pi}{5}i}$.
 — Si $k = 5p + 4$, alors $z = e^{i\left(\frac{8\pi}{5} + 2p\pi\right)} = e^{\frac{8\pi}{5}i}$.
 Ainsi, $S = \left\{ 1 ; e^{\frac{2\pi}{5}i} ; e^{\frac{4\pi}{5}i} ; e^{\frac{6\pi}{5}i} ; e^{\frac{8\pi}{5}i} \right\}$.

5 Les points A, B, C d'affixes z_A, z_B, z_C sont distincts et alignés, donc $\widehat{(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})} = 0 \pmod{2\pi}$ ou $\widehat{(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})} = \pi \pmod{2\pi}$.

Or, $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \widehat{(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})}$. Donc, $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0 \pmod{2\pi}$ ou $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \pi \pmod{2\pi}$.

Exercice 4 : (8 points)

On définit, pour tout entier naturel n , les nombres complexes z par :

$$\begin{cases} z_0 = 16 \\ z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n, \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

On note r_n le module du nombre complexe z_n : $r_n = |z_n|$.

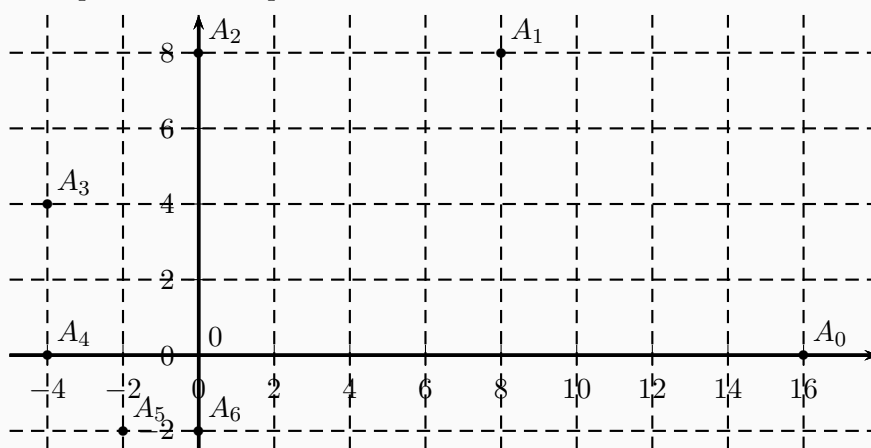
Dans le plan d'Argand-Cauchy muni d'un repère orthonormé d'origine O, on considère les points A_n d'affixes z_n .

1 a $z_1 = \frac{1+i}{2} z_0 = \frac{1+i}{2} \times 16 = 8 + 8i$.

$$z_2 = \frac{1+i}{2} z_1 = \left(\frac{1+i}{2}\right) (8 + 8i) = 4 + 4i + 4i - 4 = 8i.$$

$$z_3 = \frac{1+i}{2} z_2 = 8i \left(\frac{1+i}{2}\right) = 4i - 4 = -4 + 4i.$$

b Ci-après les points placés sur le repère.



c Si $z = \frac{1+i}{2}$ alors $|z|^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$, donc $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\text{Dès lors, } z = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

En conséquence, un argument de $\frac{1+i}{2}$ est $\frac{\pi}{4}$.

d $OA_0 = |z_0| = r_0 = 16$;

$$OA_1 = |z_1| = r_1 = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{64 \times 2} = 8\sqrt{2};$$

$$A_0A_1 = |z_1 - z_0| = |8 + 8i - 16| = |-8 + 8i| = 8\sqrt{2}.$$

On a d'une part, $OA_1 = A_0A_1$, autrement dit le triangle est isocèle en A_1 .

D'autre part, on constate que, $(8\sqrt{2})^2 + (8\sqrt{2})^2 = 16^2 \iff A_0A_1^2 + OA_1^2 = OA_0^2$ cela signifie que le triangle OA_0A_1 est rectangle en A_1 , selon la réciproque du théorème de Pythagore.

$$\boxed{2} \quad r_{n+1} = |z_{n+1}| = \left| \frac{1+i}{2} z_n \right| = \left| \frac{1+i}{2} \right| \times |z_n| = \frac{\sqrt{2}}{2} r_n.$$

$r_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} r_n$ implique que la suite (r_n) est géométrique, de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Dès lors, pour entier naturel n , on a : $r_n = r_0 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n = 16 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n$.

Par ailleurs, $-1 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n = 0$, et par produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 0$.

Ainsi, la suite (r_n) converge vers 0.

$r_n = |z_n| = OA_n$, signifie géométriquement que la limite des points A_n est le point O.

3 (a) Pour tout entier naturel n , on a :

$$\begin{aligned} A_n A_{n+1} &= |z_{n+1} - z_n| \\ &= \left| \frac{1+i}{2} z_n - z_n \right| \\ &= \left| z_n \left(\frac{1+i}{2} - 1 \right) \right| \\ &= \left| z_n \left(\frac{-1+i}{2} \right) \right| \\ &= \left| \frac{-1+i}{2} \right| \times |z_n| \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} r_n \\ &= r_{n+1}. \end{aligned}$$

(b) L_n est donc la somme des n premiers termes de la suite géométrique (r_n) . Ainsi,

$$\begin{aligned} L_n &= r_1 + \dots + r_n \\ &= 8\sqrt{2} \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}. \end{aligned}$$

(c) On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n = 0$, donc

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} L_n &= \frac{8\sqrt{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} \\ &= \frac{16\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \\ &= \frac{16\sqrt{2}}{\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)} \\ &= \frac{16}{\sqrt{2} - 1} \\ &= \frac{16(\sqrt{2} + 1)}{2 - 1} \\ &= 16(\sqrt{2} + 1). \end{aligned}$$