Maths Expertes | **Devoir Surveillé n° 2** | Lycée
maths-mde.fr | **...../20** | Evariste Galois

Exercice 1 : (2 points)

Effectuer, si cela est possible, les produits de matrices suivants.

1 $\begin{pmatrix}-1 & 3 & -1\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

2 $\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 0\end{pmatrix}$.

3 $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

4 $\begin{pmatrix}0 & -2\\ -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & -1\end{pmatrix}$.

Exercice 2 : (2 points)

Soit $A = \begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$, $A^n = \begin{pmatrix}2^{n-1} & -2^{n-1}\\ -2^{n-1} & 2^{n-1}\end{pmatrix}$.

Exercice 3 : (3 points)

Résoudre de façon matricielle les systèmes linéaires suivants.

1 $\begin{cases}3x+4y &= -1\\ 5x-y &= 2\end{cases}$.

2 $\begin{cases}x+2y+3z &= 6\\ x-2y-3z &= -6\\ x+y-2z &= 0\end{cases}$.

Exercice 4 : (4 points)

Soit n un entier naturel et M une matrice de dimension n.
On dit que M est nilpotente de rang p si $M^p = 0_n$ et $M^{p-1} \neq 0_n$.

1 Soit B une matrice nilpotente de rang p. Calculer le produit,

$$(I_n - B)(I_n + B + B^2 + \cdots + B^{p-1}).$$

2 En déduire que $I_n - B$ est inversible et déterminer son inverse.

3 Soit $A = \begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.
Montrer que A est nilpotente puis déterminer l'inverse de $I_3 - A$.

Exercice 5 : (3 points)

On considère la matrice A : $A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

1 Calculer A^2 et A^3.

2 Vérifier que $A^3 - A^2 - 2A = 4I_3$.

3 En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 6 : (6 points)

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par leur premier terme $u_0 = 2$ et $v_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, par les relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} u_{n+1} = 4u_n - 6v_n \\ v_{n+1} = u_n - v_n \end{array}\right. .$$

Pour tout entier naturel n, on définit la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1 Écrire la matrice A telle que $U_{n+1} = AU_n$.

2 Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_n = A^n U_0$.

3 On pose $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- **a** Montrer que P est inversible donner la matrice inverse P^{-1}.
- **b** Calculer : $D = P^{-1}AP$.
- **c** En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que $A^n = PD^nP^{-1}$ pour $n \geqslant 0$.

4 Donner une expression de U_n en fonction de n, puis déduire celles de u_n et v_n, en fonction de n.