Maths Expertes
maths-mde.fr

Devoir Surveillé n° 2

Corrigés

Lycée
Evariste Galois

Exercice 1 : (2 points)

1 $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\times(-1)+3\times(-1)+(-1)\times 1 & (-1)\times 1+3\times 1+(-1)\times(-1) \\ 2\times(-1)+(-2)\times(-1)+1\times 1 & 2\times 1+(-2)\times 1+1\times(-1) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$

2 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 4+3\times 0 \\ -2\times 4+4\times 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix}.$

3 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow$ Ce produit ne peut être calculé car le nombre de lignes de la première matrice est différent du nombre de colonnes de la seconde.

4 $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\times 1+(-2)\times(-2) & 0\times 0+(-2)\times(-1) \\ -2\times 1+(-1)\times(-2) & -2\times 0+(-1)\times(-1) \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Exercice 2 : (2 points)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$ ».

Initialisation : Pour $n = 1$, on a : $\begin{pmatrix} 2^{1-1} & -2^{1-1} \\ -2^{1-1} & 2^{1-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = A$. Ainsi, $P(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel non nul. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain n et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.
Par hypothèse de récurrence, on a : $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$\begin{array}{rcl} A^{n+1} & = & A \times A^n \\ & = & \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 1\times 2^{n-1}-1\times(-2^{n-1}) & 1\times(-2^{n-1})-1\times 2^{n-1} \\ -1\times 2^{n-1}+1\times(-2^{n-1}) & -1\times(-2^{n-1})+1\times 2^{n-1} \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 2\times 2^{n-1} & -2\times 2^{n-1} \\ -2\times 2^{n-1} & 2\times 2^{n-1} \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} 2^n & 2^n \\ -2^n & 2^n \end{pmatrix}. \end{array}$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.
Conclusion : Selon le principe de récurrence, on peut déduire que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

Exercice 3 : (3 points)

1 $\begin{cases} 3x+4y=-1 \\ 5x-y=2 \end{cases} \iff AX=B$, avec $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\det(A)=3\times(-1)+4\times 5=-3-20=-23$.

Étant donné que $\det(A)\neq 0$, A est inversible et $A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{23} & \frac{4}{23} \\ \frac{5}{23} & -\frac{3}{23} \end{pmatrix}$.

Ainsi,

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix} \frac{1}{23} & \frac{4}{23} \\ \frac{5}{23} & -\frac{3}{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{7}{23} \\ -\frac{11}{23} \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, $x=\dfrac{7}{23}$ et $y=-\dfrac{11}{23}$.

2 $\begin{cases} x+2y+3z &=6 \\ x-2y-3z &=-6 \\ x+y-2z &=0 \end{cases} \iff AX=B$, avec $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

En utilisant la calculatrice, on obtient : $\det(A)=14$. Or, $\det(A)\neq 0$, donc A est inversible.
Dès lors,

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{14} & -\frac{5}{14} & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{14} & \frac{1}{14} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{12}{7} \\ \frac{6}{7} \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, $x=0$, $y=\dfrac{12}{7}$ et $z=\dfrac{6}{7}$.

Exercice 4 : (3 points)

Soit n un entier naturel et M une matrice de dimension n. On dit que M est nilpotente de rang p si $M^p=0_n$ et $M^{p-1}\neq 0_n$.

1 En utilisant la distributivité, on obtient :

$$\begin{aligned}
& (I_n-B)(I_n+B+B^2+\cdots+B^{p-1}) \\
= \; & I_n^2+I_nB+I_nB^2+\cdots+I_nB^{p-1}-BI_n-B^2-B^3-\cdots-B^p \\
= \; & I_n+\cancel{B}+\cdots+\cancel{B^{p-1}}-\cancel{B}-\cancel{B^2}-\cancel{B^3}-\cdots-\cancel{B^{p-1}}-B^p \quad \text{car, pour tout } \; i\geqslant 0,\ I_nB^i=B^i \\
= \; & I_n-B^p \\
= \; & I_n. \; \text{ Car la matrice } \; B \text{ est nilpotente d'ordre } p.
\end{aligned}$$

2 Idem,

$$\begin{aligned}
& (I_n+B+B^2+\cdots+B^{p-1})(I_n-B) \\
= \; & I_n^2+BI_n+B^2I_n+\cdots+B^{p-1}I_n-BI_n-B^2-B^3-\cdots-B^p \\
= \; & I_n+\cancel{B}+\cdots+\cancel{B^{p-1}}-\cancel{B}-\cancel{B^2}-\cancel{B^3}-\cdots-\cancel{B^{p-1}}-B^p \quad \text{car, pour tout } \; i\geqslant 0,\ B^iI_n=B^i \\
= \; & I_n-B^p \\
= \; & I_n. \; \text{ Car la matrice } \; B \text{ est nilpotente d'ordre } p.
\end{aligned}$$

Il existe alors une matrice $C=I_n+B+B^2+\cdots+B^{p-1}$ telle que $(I_n-B)C=C(I_n-B)=I_n$.
Donc, la matrice I_n-B est inversible et $(I_n-B)^{-1}=I_n+B+B^2+\cdots+B^{p-1}$.

3 Soit $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. En utilisant la calculatrice, on obtient :

$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi la matrice A est nilpotente de rang 3.

En utilisant la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned}(I_3 - A)^{-1} &= I_3 + A + A^2\\ &= \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&2&1\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Exercice 5 : (4 points)

On considère la matrice A : $A = \begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&2\\1&0&1\end{pmatrix}$.

1 En utilisant la calculatrice, on obtient : $A^2 = \begin{pmatrix}2&0&6\\2&1&0\\2&2&2\end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix}8&4&8\\2&3&4\\4&2&8\end{pmatrix}$.

2 L'utilisation de la question précédente entraine :

$$\begin{aligned}A^3 - A^2 - 2A &= \begin{pmatrix}8&4&8\\2&3&4\\4&2&8\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2&0&6\\2&1&0\\2&2&2\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&2\\1&0&1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}6&4&2\\0&2&4\\2&0&6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2&4&2\\0&-2&4\\2&0&2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}\\ &= 4I_3.\end{aligned}$$

3 On a : $A^3 - A^2 - 2A = 4I_3 \Leftrightarrow \dfrac{1}{4}\left(A^3 - A^2 - 2A\right) = I_3$.
En factorisant, on obtient :
d'une part, $A\left(\dfrac{1}{4}[A^2 - A - 2I_3]\right) = I_3$ et d'autre par $\left(\dfrac{1}{4}[A^2 - A - 2I_3]\right)A = I_3$.

Il existe alors une matrice $B = \dfrac{1}{4}[A^2 - A - 2I_3]$ telle que $AB = BA = I_3$. Ainsi, la matrice est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{4}[A^2 - A - 2I_3]$. Dès lors,

$$\begin{aligned}A^{-1} &= \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix}2&0&6\\2&1&0\\2&2&2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&2\\1&0&1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right]\\ &= \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix}1&-2&5\\2&2&-2\\1&2&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\right]\\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1&-2&5\\2&0&-2\\1&2&-1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Par conséquent, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

Exercice 6 : (5 points)

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par leur premier terme $u_0 = 2$ et $v_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 4u_n - 6v_n \\ v_{n+1} = u_n - v_n \end{cases}.$$

1 Il est assez aisé de voir que :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 4u_n - 6v_n \\ v_{n+1} = u_n - v_n \end{cases} \Leftrightarrow U_{n+1} = AU_n, \text{ avec } U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

2 Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $\mathcal{P}(n) : U_n = A^n U_0$.

— **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a : $A^0 U_0 = I_2 U_0 = U_0$. Ainsi, l'initialisation est réalisée.

— **Hérédité :** Soit n un entier naturel, on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un entier naturel n et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée ?

Par hypothèse de récurrence, on a : $U_n = A^n U_0$.

Ainsi, $U_{n+1} = AU_n = A \times A^n U_0 = A^{n+1} U_0$.

L'hérédité est alors vérifiée.

— **Conclusion :** Selon le principe de récurrence, on déduit que pour tout entier naturel n, $U_n = A^n U_0$.

3 On pose $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a On sait que : $\det(P) = 3 \times 1 - 2 \times 1 = 1$.

Or, $\det(P) \neq 0$ donc P est inversible et $P^{-1} = \dfrac{1}{\det(P)} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

b Il est assez aisé d'effectuer le produit suivant et le vérifier avec la calculatrice :

$$\begin{aligned} D &= P^{-1}AP \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

c Pour tout entier naturel n, on considère la proposition $\mathcal{P}'(n) : A^n = P^{-1} D^n P$.

— **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a : $P^{-1} D^0 P = P^{-1} I_2 P = P^{-1} P = I_2 = A^0$.
Ainsi, $\mathcal{P}'(0)$ est vraie.

— **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}'(n)$ est vraie pour un certain n et montrons que $\mathcal{P}'(n+1)$ est vérifiée.

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n A \\ &= PD^n \underbrace{P^{-1}P}_{=I} DP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

L'hérédité est alors vérifiée.

— **Conclusion :** Selon le principe récurrence, on déduit que la proposition est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ On sait que : $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. De plus, $U_n = A^n U_0$. Autrement dit,

$$\begin{aligned} U_n &= PD^nP^{-1}U_0 \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \times 2^n & 2 \\ 2^n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En conséquence, (u_n) et (v_n) sont des suites constantes.