Maths Expertes
maths-mde.fr

Devoir Surveillé n° 2

...../20

Lycée
Evariste Galois

Exercice 1 : (4 points)

1 Déterminer une forme trigonométrique, puis la forme algébrique des deux nombres complexes suivants.

a $z_1 = 4e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

b $z_2 = 3e^{\frac{3i\pi}{2}}$.

2 Déterminer une forme exponentielle des deux nombres complexes suivants.

a $z_3 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3i\sqrt{3}}{2}$.

b $z_4 = i\pi$.

Exercice 2 : (3 points)

Déterminer dans chaque cas la nature de l'ensemble de points M d'affixe z du plan complexe vérifiant :

1 $|z - 2i| = 3$.

2 $|z - 34i| = |z + 2 + i|$.

Exercice 3 : (5 points)

Les cinq questions sont indépendantes.

1 Déterminer la valeur exacte de $\cos\left(-\dfrac{7\pi}{12}\right)$.

2 À l'aide de la formule de Moivre, donner la forme algébrique de $(-1 + i\sqrt{3})^6$.

3 À l'aide des formules d'Euler, écrire $\cos^4(x)$ sous la forme d'une expression linéarisée.

4 Trouver tous les nombres complexes z tels que $z^3 = 1$ et donner leur forme exponentielle.

5 Soit $P(z) = \dfrac{1}{2}z^3 + 5z + \dfrac{11}{2}$. Montrer que $P(-1) = 0$, puis résoudre l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 4 : (8 points)

On définit la suite de nombres complexes (z_n) de la manière suivante : $z_0 = 1$, et pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \dfrac{1}{3}z_n + \dfrac{2}{3}i$. On se place dans un plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
Pour tout entier naturel n, on note A_n le point du plan d'affixe z_n. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = z_n - i$ et on note B_n le point d'affixe u_n. On note C le point d'affixe i.

1 Exprimer, pour tout entier naturel n, u_{n+1} en fonction de u_n.

2 **a** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n \times (1 - i)$.

b Pour tout entier naturel n, calculer, en fonction de n, le module de u_n.

c Démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} |z_n - i| = 0$.

d Quelle interprétation géométrique peut-on donner de ce résultat ?

3 **a** Soit n un entier naturel. Déterminer un argument de u_n.

b Démontrer que, lorsque n décrit l'ensemble des entiers naturels, les points B_n sont alignés.

c Démontrer que, pour tout entier naturel n, le point A_n appartient à la droite d'équation $y = -x + 1$.