Maths Expertes
maths-mde.fr

Devoir Surveillé n° 2

Corrigé

Lycée
Evariste Galois

Exercice 1 : (4 points)

1 On rappelle que : $z = re^{i\theta} = r[\cos(\theta) + i\sin(\theta)]$.

a Une forme trigonométrique est donnée par, $z_1 = 4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$.
Or, $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Par ailleurs, la fonction sin est impaire.
Ainsi, la forme algébrique est donnée par,
$z_1 = 4\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right] = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i.$

b Une forme trigonométrique est donnée par, $z_2 = 3\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right]$.
Or, $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$.
Par conséquent, la forme algébrique est donnée par,

$$z_2 = -3i$$

.

2 Le mieux est de calculer d'abord le module d'un nombre complexe avant de donner sa forme exponentielle.

a Calculons $|z_3|$:

$$|z_3| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} z_3 &= \frac{3}{2} + \frac{3i\sqrt{3}}{2} \\ &= 3\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \\ &= 3e^{i\frac{\pi}{3}}. \end{aligned}$$

b Calculons $|z_4|$:
$|z_4| = \sqrt{\pi^2} = \pi$.
Ainsi,

$$\begin{aligned} z_4 &= \pi\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= \pi e^{i\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Exercice 2 : (3 points)

1 L'ensemble de points M d'affixe z du plan complexe vérifiant $|z-2i| = 3$, est le cercle de centre $O(0;2)$ et de rayon 3. En effet,

$$\begin{aligned} |z-2i| = 3 &\Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-2)^2} = 3 \\ &\Leftrightarrow x^2+(y-2)^2 = 9. \end{aligned}$$

2 L'ensemble de points M d'affixe z du plan complexe vérifiant $|z-34i| = |z+2+i|$, est la médiatrice du segment $[AB]$, avec A et B les deux points d'affixe respective $3+4i$ et $-2-2i$. On peut déterminer l'équation de cette droite.

$$\begin{aligned} |z-34i| = |z+2+i| &\Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2} = \sqrt{(x+2)^2+(y+1)^2} \\ &\Leftrightarrow (x-3)^2+(y-4)^2 = (x+2)^2+(y+1)^2 \\ &\Leftrightarrow -6x+9-8y+16 = 4x+4+2y+1 \\ &\Leftrightarrow -10x-10y+20 = 0. \\ &\Leftrightarrow y = -x+2. \end{aligned}$$

C'est l'équation de la droite (AB).

Exercice 3 : (5 points)

1 On sait que : $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$. Par ailleurs, $\dfrac{7\pi}{12}=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)\\
&= \cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\\
&= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\\
&= \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{4}.
\end{aligned}$$

2 En utilisant la formule de Moivre $(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
(-1+i\sqrt{3})^6 &= 2^6\times\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6\\
&= 64\times\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^6\\
&= 64\times\left(\cos\left(6\times\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(6\times\frac{2\pi}{3}\right)\right)\\
&= 64\times(\cos(4\pi)+i\sin(4\pi))\\
&= 64.
\end{aligned}$$

3 En utilisant la formule d'Euler $\cos(\theta)=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\cos^4(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4\\
&= \frac{e^{4ix}+4e^{3ix}e^{-ix}+6e^{2ix}e^{-2ix}+4e^{ix}e^{-3ix}+e^{-4ix}}{16}\\
&= \frac{e^{4ix}+e^{-4ix}+4e^{2ix}+4e^{-2ix}+6}{16}\\
&= \frac{\cos(4x)+4\cos(2x)+3}{8}.
\end{aligned}$$

4 Posons $z=e^{i\theta}$. Ainsi, $z^3=1 \iff |z|^3=1 \iff |z|=1$.
Par ailleurs,

$$z^3=1 \iff e^{3i\theta}=e^{i(0+2k\pi)},\ k\in\mathbb{Z} \iff \theta=\frac{2k\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}.$$

- Si $k=3p$, $p\in\mathbb{Z}$, $z=e^{i\times 2p\pi}=1$;
- si $k=3p+1$, $z=e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+2p\pi\right)}=e^{\frac{2i\pi}{3}}=j$;
- si $k=3p+2$, $z=e^{i\left(\frac{4\pi}{3}+2p\pi\right)}=e^{\frac{4i\pi}{3}}=e^{-\frac{2i\pi}{3}}=\bar{j}$.

Finalement, il n'y a que trois complexes dont le cube est égal à 1 : 1, $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $\bar{j}=e^{-\frac{2i\pi}{3}}$.

5 On a $P(z)=\dfrac{1}{2}z^3+5z+\dfrac{11}{2}$. Il est assez aisé de remarquer que 1 est une solution évidente. En effet,

$$P(1)=\frac{1}{2}\times 1^3+5\times 1+\frac{11}{2}=\frac{1}{2}+\frac{10}{2}-\frac{11}{2}=0.$$

On en déduit alors que :

$$P(z)=(z+1)(az^2+bz+c).$$

En développant, on obtient :

$$P(z) = az^3 + (a+b)z^2 + (b+c)z + c.$$

L'identification des coefficients, entraine :

$$\begin{cases} a &= \frac{1}{2} \\ a+b &= 0 \\ b+c &= 5 \\ c &= \frac{11}{2} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{11}{2} \end{cases}.$$

Ainsi,

$$P(z) = (z+1)\left(\frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}z + \frac{11}{2}\right).$$

Le discriminant de $\frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}z + \frac{11}{2}$ est :

$$\Delta = -\frac{43}{4}.$$

donc ses racines complexes sont :

$$z_1 = \frac{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{43}}{2}i}{2 \times \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{43}}{2} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \overline{z_1} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{43}}{2}i.$$

Par conséquent, les solutions de l'équation $P(z) = 0$ sont -1, z_1 et z_2.

Exercice 4 : (8 points)

On définit la suite de nombres complexes (z_n) de la manière suivante : $z_0 = 1$, et pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \dfrac{1}{3}z_n + \dfrac{2}{3}i$. On se place dans un plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
Pour tout entier naturel n, on note A_n le point du plan d'affixe z_n. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = z_n - i$ et on note B_n le point d'affixe u_n. On note C le point d'affixe i.

1 Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= z_{n+1} - i \\ &= \frac{1}{3}z_n + \frac{2}{3}i - i \\ &= \frac{1}{3}z_n - \frac{1}{3}i \\ &= \frac{1}{3}(z_n - i) \\ &= \frac{1}{3}u_n. \end{aligned}$$

2 **a** Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{3}u_{n-1} \\ u_{n-1} &= \frac{1}{3}u_{n-2} \\ \vdots &\ \vdots\ \vdots \\ u_2 &= \frac{1}{3}u_1 \\ u_1 &= \frac{1}{3}u_0. \end{aligned}$$

En multipliant membre à membre les susdites égalités, on obtient :

$$\begin{aligned}
u_n u_{n-1}\cdots u_2 u_1 &= \left(\frac{1}{3}\right)^n u_{n-1}u_{n-2}u_1u_0\\
u_n \cancel{u_{n-1}}\cdots \cancel{u_2 u_1} &= \left(\frac{1}{3}\right)^n \cancel{u_{n-1}}\cancel{u_{n-2}}\cancel{u_1}u_0\\
u_n &= \left(\frac{1}{3}\right)^n u_0\\
u_n &= \left(\frac{1}{3}\right)^n \times (1-i).
\end{aligned}$$

Ainsi, (u_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ et de terme initial $1-i$.

b Pour tout entier naturel n, le module de u_n est donné par :

$$\begin{aligned}
|u_n| &= \left|\left(\frac{1}{3}\right)^n \times (1-i)\right|\\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^n \times |(1-i)|\\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \sqrt{1^2+(-1)^2}\\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

c Étant donné que $0 < \dfrac{1}{3} < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}|z_n - i| &= \lim_{n\to+\infty}|u_n|\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n \times \sqrt{2}\right]\\
&= 0.
\end{aligned}$$

d Le résultat précédent signifie que les points A_n d'affixes z_n, avec $n \in \mathbb{N}$ converge vers le point C d'affixe i, quand n tend vers l'infini.

3 **a** Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned}
u_n &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)\\
&= \sqrt{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2}\right)\\
&= \sqrt{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, $\arg(u_n) = -\dfrac{\pi}{4} \quad [2\pi]$.

b Pour tout entier naturel n, montrons que les points B_{n+2}, B_{n+1} et B_n d'affixe respective u_{n+2}, u_{n+1} et u_n, sont alignés. Pour ce faire, il suffit de montrer que $\arg\left(\dfrac{u_{n+2}-u_{n+1}}{u_n - u_{n+1}}\right) = k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. En effet,

$$\arg\left(\frac{u_{n+2}-u_{n+1}}{u_n-u_{n+1}}\right) = \arg\left(\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2}\times(1-i) - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\times(1-i)}{\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\times(1-i) - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\times(1-i)}\right)$$

$$\begin{aligned}
\arg\left(\frac{u_{n+2}-u_{n+1}}{u_n-u_{n+1}}\right) &= \arg\left(\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{n}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}\right)\\
&= \arg\left(\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2}-\left(\frac{1}{3}\right)^{1}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{1}}\right)\\
&= \arg\left(-\frac{1}{3}\right)\\
&= k\pi.
\end{aligned}$$

Par conséquent, les points B_n sont bel et bien alignés.

c Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned}
z_n &= u_n+i\\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^n\times(1-i)+i\\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)i.
\end{aligned}$$

Ainsi, le point A_n d'affixe z_n appartient bel et bien à la droite d'équation $y=-x+1$.