Maths Expertes
maths-mde.fr

Devoir Surveillé n° 1

Corrigé

Lycée
Evariste Galois

Exercice 1 : (3 points)

La forme algébrique des conjugués.

1

$$\begin{aligned}
\overline{z_1} &= \overline{\left(\frac{i}{1-i}\right)^2} \\
&= \left(\overline{\frac{i}{1-i}}\right)^2 \\
&= \left(\frac{-i}{\overline{1-i}}\right)^2 \\
&= \left(\frac{-i(1-i)}{1^2-i^2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{-i-1}{2}\right)^2 \\
&= \left(\frac{1-i}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1^2+2i+i^2}{4} \\
&= \frac{i}{2} \\
&= 0+\frac{1}{2}i.
\end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned}
\overline{z_2} &= \overline{\left(\frac{1+i}{7+i}\right)} + \overline{\left(\frac{5}{1-i}\right)} \\
&= \frac{\overline{1+i}}{\overline{7+i}} + \frac{5}{\overline{1+i}} \\
&= \frac{1-i}{7-i} + \frac{5}{1-i} \\
&= \frac{(1-i)(7+i)}{50} + \frac{5(1-i)}{2} \\
&= \frac{(1-i)(7+i)}{50} + \frac{25\times 5(1-i)}{50} \\
&= \frac{7+i-7i+1+125-125i}{50} \\
&= \frac{133-131i}{50} \\
&= \frac{133}{50} - \frac{131}{50}i
\end{aligned}$$

Exercice 2 : (4 points)

1 La forme algébrique de la somme :

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=0}^{234} i^k \\
&= 1+i+i^2+\cdots+i^{234} \\
&= \frac{i^{235}-1}{i-1} \\
&= \frac{i^{4\times 58+3}-1}{i-1} \qquad \text{car,} \quad 235 = 4\times 58+3 \\
&= \frac{(i^4)^{58}\times i^3-1}{i-1} \\
&= \frac{-i-1}{i-1} \qquad \text{car,} \quad i^4 = 1 \quad \text{et} \quad i^2=-1 \\
&= \frac{(-i-1)^2}{(i-1)(-i-1)} \\
&= \frac{(i+1)^2}{2} \\
&= \frac{1+2i+i^2}{2} \\
&= 0+1i.
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ La forme algébrique :

$$\begin{aligned}
(1-2i)^5 &= \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}1^k\times(-2i)^k \\
&= 1^5+5\times 1^4\times(-2i)+10\times 1^3\times(-2i)^2+10\times 1^2\times(-2i)^3+5\times 1\times(-2i)^4+(-2i)^5 \\
&= 1-10i-40+80i+80-32i \\
&= 41+38i.
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Posons : $\sqrt{2i+3}=a+ib$, a et b deux réels. Ainsi,

$$\begin{aligned}
2i+3=(a+ib)^2 &\Leftrightarrow 2i+3=a^2-b^2+2abi \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2 &= 3 \\ 2ab &= 2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2 &= 3 \\ ab &= 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2 &= 3 \\ b &= \dfrac{1}{a}, \text{ avec } a\neq 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-\dfrac{1}{a^2} &= 3 \\ b &= \dfrac{1}{a} \text{ avec } a\neq 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a^4-1 &= 3a^2 \\ b &= \dfrac{1}{a} \text{ avec } a\neq 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a^4-3a^2-1 &= 0 \\ b &= \dfrac{1}{a} \text{ avec } a\neq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Posons $X=a^2$. On obtient alors : $X^2-3X-1=0$. Le discriminant de cette équation est égal à : $\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times 1\times(-1)=13$. Δ étant positif, cette équation admet deux solutions : $X_1=\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}$ et $X_2=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$. Or, $X>0$. Donc, $a^2=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.
Autrement dit, $a=\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}}$ ou $a=-\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}}$.
Par conséquent, $\sqrt{2i+3}=\pm\left(\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}}+\dfrac{i}{\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}}}\right)$.
Attention ! Cette notation $\sqrt{2i+3}$ est fortement déconseillée. Car, déterminer une racine carrée d'un nombre complexe z revient à résoudre l'équation $z^2=a+ib$ et cette équation admet deux solutions dans $\mathbb{C}$.
Par ailleurs, la forme algébrique d'un nombre complexe est unique, donc cette écriture
$\sqrt{2i+3}=\pm\left(\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}}+\dfrac{i}{\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}}}\right)$ n'est pas correcte.
Une fois que vous avez compris cela, vous pouvez utiliser quand même cette notation pour aller un peu plus vite dans le raisonnement.

$\boxed{\mathbf{4}}$ z_1 et z_2 sont deux nombres complexes :

$$\begin{cases} \overline{2\overline{z_1}+3\overline{z_2}} &= \overline{5+3i} \\ z_1-3z_2 &= 4+6i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z_1+3z_2 &= 5-3i & L_1 \\ z_1-3z_2 &= 4+6i & L_2 \end{cases}.$$

$L_1 + L_2 \Longrightarrow 3z_1 = 9 + 3i \Longrightarrow z_1 = 3 + i.$
$L_1 - 2L_2 \Longrightarrow 9z_2 = -3 - 15i \Longrightarrow z_2 = -\frac{1}{3} - \frac{5}{3}i.$
Ainsi, $S = \left\{3 + i\ ;\ -\frac{1}{3} - \frac{5}{3}i\right\}.$

Exercice 3 : (2 points)

Soit x un réel et $z = 2x^2 - x - 1 + i(10x^3 - 2x)$

1

$$\begin{aligned} z \text{ est un imaginaire pur} &\Leftrightarrow Re(z) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0. \quad (E) \end{aligned}$$

Le discriminant de l'équation (E) est égal à : $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 9.$
Δ étant > 0, l'équation (E) admet deux solutions : $x_1 = \dfrac{1 - \sqrt{9}}{4} = -\dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1 + \sqrt{9}}{4} = 1.$
Ainsi, il existe deux valeurs de x pour lesquelles z est un réel :
$z = \left(10 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 2 \times \frac{-1}{2}\right) i = -\frac{i}{4}$ ou $z = \left(10 \times 1^3 - 2 \times 1\right) i = 8i.$

2

$$\begin{aligned} z \text{ est réel} &\Leftrightarrow Im(z) = 0 \\ &\Leftrightarrow 10x^3 - 2x = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x(5x^2 - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \ \text{ ou } \ x^2 = \frac{1}{5} \\ &\Leftrightarrow x = 0 \ \text{ ou } \ x = \frac{1}{\sqrt{5}} \ \text{ ou } \ x = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ &\Leftrightarrow x = 0 \ \text{ ou } \ x = \frac{\sqrt{5}}{5} \ \text{ ou } \ x = -\frac{\sqrt{5}}{5}. \end{aligned}$$

Par conséquent, il existe trois valeurs de x pour lesquelles z est un réel :
$z_1 = -1, \ \ z_2 = \frac{2}{5} - \frac{\sqrt{5}}{5} - 1 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{5}$ et $z_3 = \frac{2}{5} + \frac{\sqrt{5}}{5} - 1 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{5}.$

Exercice 4 : (2,5 points)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les deux équations suivantes en donnant les solutions sous forme algébrique.

1 Soit $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} (3 - 5i)z = 7 - z &\Leftrightarrow (3 - 5i)z + z = 7 \\ &\Leftrightarrow (4 - 5i)z = 7 \\ &\Leftrightarrow z = \frac{7}{4 - 5i} \\ &\Leftrightarrow z = \frac{7(4 + 5i)}{(4 - 5i)(4 + 5i)} \\ &\Leftrightarrow z = \frac{28 + 35i}{4^2 + (-5)^2} \\ &\Leftrightarrow z = \frac{28 + 35i}{16 + 25} \\ &\Leftrightarrow z = \frac{28 + 35i}{41}. \end{aligned}$$

Ainsi, $S=\left\{\frac{28}{41}+\frac{35}{41}i\right\}$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Posons, $z=a+ib$. Ainsi,

$$\begin{aligned}4(a+ib)-2i(a-ib)=-5-3i &\Leftrightarrow 4a+4bi-2ai-2b+5+3i=0\\ &\Leftrightarrow 4a-2b+5+i(4b-2a+3)=0\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}4a-2b+5=0 & L_1\\ 4b-2a+3=0 & L_2\end{cases}.\end{aligned}$$

Dès lors,

$L_1+2L_2 \Longrightarrow -2b+8b+5+6=0 \Longrightarrow 6b=-11 \Longrightarrow b=-\frac{11}{6}$.

$2L_1+L_2 \Longrightarrow 8a-2a+10+3=0 \Longrightarrow 6a=-13 \Longrightarrow a=-\frac{13}{6}$.

Ainsi, $S=\left\{-\frac{13}{6}-\frac{11}{6}i\right\}$.

Exercice 5 : (2,5 points)

$\boxed{\mathbf{1}}$ Le discriminant de l'équation $2z^2-5z+7=0$ est égal à :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2-4ac\\ &= (-5)^2-4\times 2\times 7\\ &= 25-56\\ &= -31.\end{aligned}$$

Δ étant négatif, cette équation admet deux solutions dans $\mathbb{C}$: $z_1=\frac{5-i\sqrt{31}}{4}$ et $z_2=\frac{5+i\sqrt{31}}{4}$.

Ainsi, $S=\left\{\frac{5-i\sqrt{31}}{4}\ ;\ \frac{5+i\sqrt{31}}{4}\right\}$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Posons $z=a+ib$. Ainsi,

$$\begin{aligned}z^2+2\overline{z}-1=0 &\Leftrightarrow (a+ib)^2+2(a-ib)-1=0\\ &\Leftrightarrow a^2-b^2+2iab+2a-2ib-1=0\\ &\Leftrightarrow a^2-b^2+2a-1+i(2ab-2b)=0\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}a^2-b^2+2a-1=0\\ 2ab-2b=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}a^2-b^2+2a-1=0\\ b=0 \text{ ou } 2a-2=0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}a^2-b^2+2a-1=0\\ b=0 \text{ ou } a=1\end{cases}\end{aligned}$$

Si $b=0$, alors $a^2+2a-1=0\ \ (*)$. Le discriminant de l'équation $(*)$ est égal à :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2-4ac\\ &= 2^2-4\times 1\times(-1)\\ &= 4+4\\ &= 8.\end{aligned}$$

Ainsi, $a_1=\frac{-2-\sqrt{8}}{2}=-1-\sqrt{2}$ et $a_2=\frac{-2+\sqrt{8}}{2}=-1+\sqrt{2}$.

Si $a=1$ alors $1^2-b^2+2\times 1-1=0$. Ce qui implique que : $b^2=2$. Autrement dit, $b=\sqrt{2}$ ou $b=-\sqrt{2}$.

Par conséquent, $S=\left\{-1-\sqrt{2}\ ;\ -1+\sqrt{2}\ ;\ 1+\sqrt{2}i\ ;\ 1-\sqrt{2}i\right\}$.

Exercice 6 : (3 points)

On pose pour tout complexe z : $f(z) = 2z^3 - 3z + 5i$.

1 i est une racine de f. En effet,

$$\begin{array}{rcl} f(i) & = & 2 \times i^3 - 3 \times i + 5i \\ & = & -2i + 2i \\ & = & 0. \end{array}$$

2 Soient a, b et c trois nombres :

$$\begin{array}{rcl} f(z) & = & (z-i)(az^2 + bz + c) \\ & = & az^3 + bz^2 + cz - iaz^2 - ibz - ic \\ & = & az^3 + (b - ia)z^2 + (c - ib)z - ic \end{array}$$

Ainsi, par principe d'identification des coefficients, on obtient :

$$\begin{cases} a = 2 \\ b - ia = 0 \\ c - ib = -3 \\ -ic = 5i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2i \\ c = -3i + b \\ c = -5 \end{cases}.$$

Ainsi, $f(z) = (z-i)(2z^2 + 2iz - 5)$.

3 Soit $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{array}{rcl} f(z) = 0 & \Leftrightarrow & (z-i)(2z^2 + 2iz - 5) = 0 \\ & \Leftrightarrow & z = i \;\text{ ou }\; 2z^2 + 2iz - 5 = 0. \;\; (E) \end{array}$$

Le discriminant de l'équation (E) est égal à :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2i)^2 - 4 \times 2 \times (-5) = -4 + 50 = 36.$$

L'équation (E) admet deux solutions dans $\mathbb{C}$:

$$z_1 = \frac{-2i + \sqrt{36}}{4} = \frac{-i+3}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-2i - \sqrt{36}}{4} = \frac{-i-3}{2}.$$

Ainsi, $S = \left\{ i \; ; \; \frac{-i+3}{2} \; ; \frac{-i-3}{2} \right\}$.

Exercice 7 : (3 points)

Soit la suite de nombres complexes (z_n) définie dans $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = \frac{1}{2} i \times z_n + 5 \end{cases}$.

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = z_n - (4 + 2i)$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & z_{n+1} - (4+2i) \\ & = & \frac{1}{2}i \times z_n + 5 - 4 - 2i \\ & = & \frac{1}{2}i \times z_n + 1 - 2i \\ & = & \frac{i}{2}\left(z_n + \frac{1-2i}{\frac{i}{2}}\right) \\ & = & \frac{i}{2}\left(z_n + \frac{2}{i} - 4\right) \\ & = & \frac{i}{2}\left(z_n - 2i - 4\right) \\ & = & \frac{i}{2}u_n. \end{array}$$

Ce qui implique que, pour entier naturel n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{i}{2}$. Autrement dit, (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{i}{2}$ et de premier terme $u_0 = -4 - 2i$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ La suite (u_n) étant géométrique, nous pouvons alors l'écrire sous la forme :

$$u_n = u_0 \left(\frac{i}{2}\right)^n = -(4+2i)\left(\frac{i}{2}\right)^n.$$

Dès lors, on peut déduire l'expression explicite de z_n en fonction de n :

$$z_n = u_n + (4+2i) = -(4+2i)\left(\frac{i}{2}\right)^n + (4+2i) = -(4+2i)\left[\left(\frac{i}{2}\right)^n - 1\right].$$