Devoir Surveillé n° 1

...../20

Exercice 1 : (4 points)

Mettre les nombres complexes suivants sous la forme algébrique.

1 $z_1 = \dfrac{1}{5+9i}$.

2 $z_2 = \dfrac{2-3i}{8+6i}$.

3 $Z = \left(\dfrac{1}{1-i}\right)^2$.

4 $z = \dfrac{1-i}{3+i} + \dfrac{2}{1-i}$.

Exercice 2 : (3 points)

Pour tout complexe $z \neq -1$, on pose : $Z = \dfrac{z+1}{\overline{z}+1}$.
Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ relatifs aux deux premières questions.

1 Le nombre Z soit réel.

2 Le nombre Z soit imaginaire pur.

3 Tracer ces deux ensembles de points dans le plan complexes $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Exercice 3 : (4 points)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes en donnant la solution sous forme algébrique :

1 $-2z + 3 = iz + 1 - i$.

2 $(3+5i)z = 1 - z$.

3 $2z - 2i\overline{z} = -5 - i$.

4 $iz + \overline{z} - 3 = 7 - \overline{z} + 5i$.

Exercice 4 : (2 points)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes en donnant les solutions sous la forme algébrique.

1 $2z^2 - z + 5 = 0$.

2 $z^2 + 2\overline{z} + 1 = 0$.

Exercice 5 : (3 points)

On considère l'équation (E) : $z^3 - 2(\sqrt{2} - i)z^2 + (3 - 4i\sqrt{2})z + 6i = 0$.

1 Vérifier que $-2i$ est solution de l'équation (E).

2 Déterminer a, b et c tels que : $z^3 - 2(\sqrt{2} - i)z^2 + (3 - 4i\sqrt{2})z + 6i = (z+2i)(az^2 + bz + c)$.

3 Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.

Exercice 6 : (4 points)

Les trois questions sont indépendantes.

1 Donner la forme algébrique de la somme : $S = \sum_{k=0}^{143} i^k = 1 + i + i^2 + \cdots + i^{143}$.

2 Donner la forme algébrique de : $(1-2i)^6$.

3 Donner la forme algébrique de : $\sqrt{2i}$.