Maths Expertes
maths-mde.fr

Devoir Surveillé n° 1

Corrigé

Lycée
Evariste Galois

Exercice 1 : (4 points)

Voici la forme algébrique de chaque nombre.

1

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{5+9i} \\ &= \frac{5-9i}{(5+9i)(5-9i)} \\ &= \frac{5-9i}{5^2-(9i)^2} \\ &= \frac{5-9i}{25+81} \\ &= \frac{5-9i}{106} \\ &= \frac{5}{106}-\frac{9}{106}i. \end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{2-3i}{8+6i} \\ &= \frac{(2-3i)(8-6i)}{(8+6i)(8-6i)} \\ &= \frac{16-12i-24i-18}{8^2-(6i)^2} \\ &= \frac{-2-36i}{64+36} \\ &= \frac{-2-36i}{100} \\ &= -\frac{1}{50}-\frac{9}{25}i. \end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned} Z &= \left(\frac{1}{1-i}\right)^2. \\ &= \frac{1}{(1-i)^2} \\ &= \frac{1}{1-2i+i^2} \\ &= \frac{1}{1-2i-1} \\ &= \frac{1}{-2i} \\ &= \frac{i}{-2i^2} \\ &= \frac{i}{2}. \end{aligned}$$

4

$$\begin{aligned} z &= \frac{1-i}{3+i}+\frac{2}{1-i} \\ &= \frac{(1-i)^2}{(3+i)(1-i)}+\frac{2(3+i)}{(1-i)(3+i)} \\ &= \frac{1-2i+i^2+6+2i}{(3+i)(1-i)} \\ &= \frac{1-2i+i^2+6+2i}{3-3i+i+1} \\ &= \frac{6}{4-2i} \\ &= \frac{3}{2-i} \\ &= \frac{3(2+i)}{5} \\ &= \frac{6}{5}+\frac{3}{5}i. \end{aligned}$$

Exercice 2 : (3 points)

Posons, $z=x+iy$. Pour tout complexe $z\neq -1$,

$$\begin{aligned} Z &= \frac{z+1}{\overline{z}+1} \\ &= \frac{x+iy+1}{\overline{x+iy}+1} \\ &= \frac{x+1+iy}{x+1-iy} \\ &= \frac{(x+1+iy)^2}{(x+1-iy)(x+1+iy)} \\ &= \frac{(x+1)^2+2y(x+1)i-y^2}{(x+1)^2+y^2}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\Re(Z) = \dfrac{(x+1)^2 - y^2}{(x+1)^2 + y^2}$ et $\Im(Z) = \dfrac{2y(x+1)}{(x+1)^2 + y^2}$.

1

$$\begin{aligned} Z \text{ est un réel} &\Leftrightarrow \Im(Z) = 0 \\ &\Leftrightarrow y(x+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } x+1 = 0 \\ &\Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } \ x = -1. \end{aligned}$$

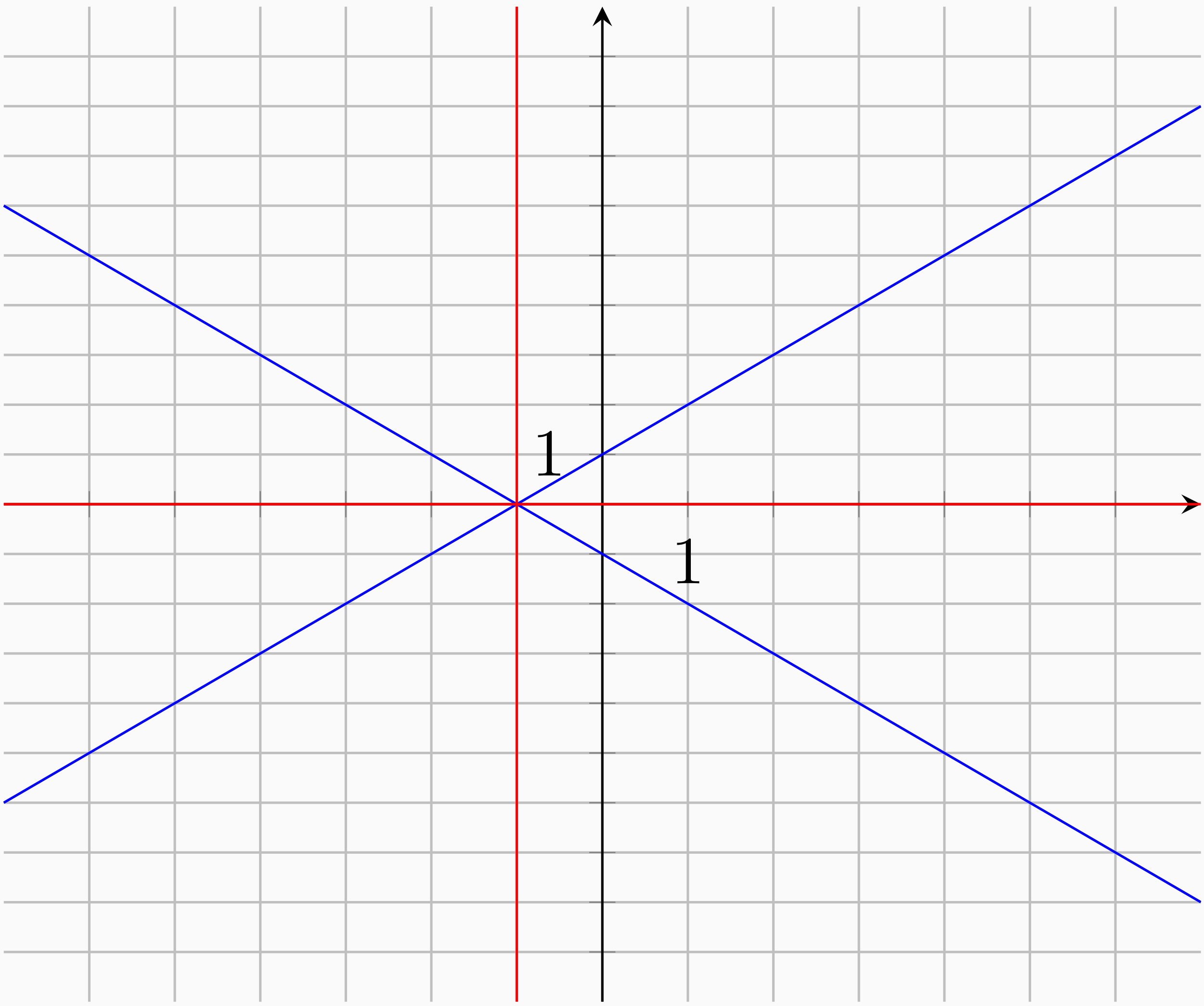
Par conséquent, l'ensemble des solutions est égal à : $S_1 = \{(x,0)|x \in \mathbb{R}/\{-1\}\} \cup \{(-1;y)|y \in \mathbb{R}^*\}$.
Ce sont donc deux droites, la première est l'axe des abscisses privé du point de coordonnées $(-1;0)$ et la seconde est la parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point de coordonnées $(-1;0)$.

2

$$\begin{aligned} Z \quad \text{est imaginaire pur} &\Leftrightarrow \Re(Z) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(x+1)^2 - y^2}{(x+1)^2 + y^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)^2 - y^2 = 0 \text{ et } (x;y) \neq (-1;0) \\ &\Leftrightarrow (x+1-y)(x+1+y) = 0 \ \text{ et } (x;y) \neq (-1;0) \\ &\Leftrightarrow y = x+1 \text{ ou } y = -x-1 \text{ et } (x;y) \neq (-1;0). \end{aligned}$$

Par conséquent, l'ensemble des solutions est égal à :
$S_2 = \{(x; x+1)|x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x; -x-1)|x \in \mathbb{R}\}/\{(-1,0)\}$.

3 S_1 est représenté en rouge et S_2 est représenté en bleu.



Exercice 3 : (4 points)

Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$, en donnant les solutions sous forme algébrique.

1 1 est la solution de cette équation. En effet,

$$\begin{aligned}
-2z+3 &= iz+1-i \\
-2z-iz &= 1-i-3 \\
(-2-i)z &= -2-i \\
z &= \frac{-2-i}{-2-i} \\
z &= 1.
\end{aligned}$$

2 $\frac{4}{41}-\frac{i}{5}$ est la solution de cette équation. En effet,

$$\begin{aligned}
(3+5i)z &= 1-z \\
(3+5i)z+z &= 1 \\
(4+5i)z &= 1 \\
z &= \frac{1}{4+5i} \\
z &= \frac{4-5i}{4^2-(5i)^2} \\
z &= \frac{4-5i}{16+25} \\
z &= \frac{4}{41}-\frac{5i}{41}.
\end{aligned}$$

3 Posons $z=x+iy$. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
& 2z-2i\overline{z}=-5-i \\
\Leftrightarrow\ & 2(x+iy)-2i(x-iy)=-5-i \\
\Leftrightarrow\ & 2x-2y+(2y-2x)i=-5-i \\
\Leftrightarrow\ & 2x-2y=-5 \text{ et } 2y-2x=-1 \\
\Leftrightarrow\ & -5=1.
\end{aligned}$$

Ce qui est absurde, cette équation n'admet donc pas de solution.

4 Posons $z=x+iy$. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
& iz+\overline{z}-3=7-\overline{z}+5i \\
\Leftrightarrow\ & i(x+iy)+x-iy-3=7-x+iy+5i \\
\Leftrightarrow\ & -y+x+(-y+x)i-3=7-x+(y+5)i \\
\Leftrightarrow\ & -y+x-3=7-x \text{ et } -y+x=y+5 \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} -y+2x-10 = 0 & L_1 \\ -2y+x-5 = 0 & L2 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} 2x-10 = 0 & L_1 \\ -3y = 0 & 2L_2-L_1 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & x=5 \text{ et } y=0.
\end{aligned}$$

Ainsi, 5 est la solution de cette équation.

Exercice 4 : (2 points)

Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$, en donnant les solutions sous forme algébrique.

1 Le discriminant de cette équation $2z^2-z+5=0$ est : $\Delta=(-1)^2-4\times2\times5=1-40=-39=39i^2$.
Ainsi, $\frac{1-i\sqrt{39}}{4}$ et $\frac{1+i\sqrt{39}}{4}$ sont les deux solutions de cette équation dans $\mathbb{C}$.

2 Posons $z=a+ib$. On a donc,

$$\begin{aligned}
z^2+2\overline{z}+1=0 &\Leftrightarrow (a+ib)^2+2(a-ib)+1=0 \\
&\Leftrightarrow a^2+2abi+(ib)^2+2(a-ib)+1=0 \\
&\Leftrightarrow a^2+2abi-b^2+2a-2bi+1=0 \\
&\Leftrightarrow a^2-b^2+2a+1+2b(a-1)i=0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2+2a+1 = 0 \\ 2b(a-1) = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2+2a+1 = 0 \\ b=0 \text{ ou } a-1 = 0 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Si $b=0$, alors $a^2+2a+1=(a+1)^2=0$. Autrement dit, $a=-1$.
Si $a=1$, alors $b^2=4$. Autrement dit, $b=2$ ou $b=-2$.
Par conséquent, $S=\{-1;1+2i;1-2i\}$.

Exercice 5 : (3 points)

On considère l'équation (E) : $z^3 - 2(\sqrt{2} - i)z^2 + (3 - 4i\sqrt{2})z + 6i = 0$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $-2i$ est une solution évidente de (E). En effet,
$(-2i)^3 - 2(\sqrt{2} - i)(-2i)^2 + (3 - 4i\sqrt{2})(-2i) + 6i = 8i + 8(\sqrt{2} - i) - 6i - 8\sqrt{2} + 6i = 0$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ En développant, on obtient :

$$\begin{aligned}(z+2i)(az^2+bz+c) &= az^3 + bz^2 + cz + 2iaz^2 + 2ibz + 2ic \\ &= az^3 + (b+2ia)z^2 + (c+2bi)z + 2ic.\end{aligned}$$

Or, $z^3 - 2(\sqrt{2} - i)z^2 + (3 - 4i\sqrt{2})z + 6i = (z+2i)(az^2+bz+c)$. Cela revient à dire,

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2ic = 6i \\ b + 2ai = -2(\sqrt{2} - i) \\ c + 2bi = 3 - 4i\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = 3 \\ b + 2i = -2\sqrt{2} + 2i \\ c + 2bi = 3 - 4i\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ c = 3 \\ b = -2\sqrt{2} \end{cases}.$$

Ainsi, $z^3 - 2(\sqrt{2} - i)z^2 + (3 - 4i\sqrt{2})z + 6i = (z+2i)(z^2 - 2\sqrt{2}z + 3)$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Le discriminant de l'équation (*) $z^2 - 2\sqrt{2}z + 3 = 0$ est égal à :
$\Delta = (2\sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times 3 = 8 - 12 = -4 = (2i)^2$.
Ainsi, $\sqrt{2} - i$ et $\sqrt{2} + i$ sont les deux solutions de l'équation (*).
Et par conséquent l'ensemble des solutions de l'équation (E) est donné par $S = \left\{-2i; \sqrt{2} - i; \sqrt{2} + i\right\}$.

Exercice 6 : (4 points)

Les trois questions sont indépendantes.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $0 + i0$ est la forme algébrique de la somme. En effet,

$$\begin{aligned}1 + i + \cdots + i^{143} &= \frac{1 - i^{143+1}}{1 - i} \\ &= \frac{1 - i^{144}}{1 - i} \\ &= \frac{1 - i^{36\times 4}}{1 - i} \\ &= \frac{1 - \left(i^4\right)^{36}}{1 - i} \\ &= 0.\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ $535 - 92i$ est la forme algébrique $(1-2i)^6$. En effet,

$$\begin{aligned}(1-2i)^6 &= \left((1-2i)^3\right)^2 \\ &= \left(1^3 - 3 \times 1^2 \times (2i) + 3 \times 2 \times (2i)^2 - (2i)^3\right)^2 \\ &= (1 - 6i - 12 + 8i)^2 \\ &= (-11 + 2i)^2 \\ &= (-11)^2 + 2 \times (-11) \times (2i) + (2i)^2 \\ &= 121 - 44i - 4 \\ &= 117 - 44i.\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Posons $\sqrt{i} = a + ib$. Ainsi,

$$
\begin{aligned}
(a+ib)^2 = i &\iff a^2 - b^2 + 2abi = i \\
&\iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ b = \dfrac{1}{2a} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a^2 - \left(\frac{1}{2a}\right)^2 = 0 \\ b = \dfrac{1}{2a} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2a^4 - 1 = 0 \\ b = \dfrac{1}{2a} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a^4 = \frac{1}{2} \quad \text{soit} \quad a^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ b = \dfrac{1}{2a}. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Simplifions l'écriture de a en considérant que $\sqrt{2} = 2^{1/2}$, et donc que $\sqrt{\sqrt{2}} = \left(2^{1/2}\right)^{1/2} = 2^{1/4}$.

On déduit alors que, $a = \pm\dfrac{\sqrt{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = \pm\dfrac{2^{1/4}}{2^{1/2}} = \pm 2^{-1/2} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Et, $b = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

On obtient finalement :

$$\boxed{\sqrt{2i} = \pm\,(1+i)}.$$