

DEVOIR MAISON N°3

Exercice 1 : (7 points)

Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On donne le nombre complexe $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés du nombre j et de mettre en évidence un lien de ce nombre avec les triangles équilatéraux.

Partie A.

1. (a) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation :

$$z^2 + z + 1 = 0.$$

(b) Vérifier que le nombre complexe j est une solution de cette équation.

2. Déterminer le module et un argument du nombre complexe j , puis donner sa forme exponentielle.

3. Démontrer les égalités suivantes :

(a) $j^3 = 1$;

(b) $j^2 = -1 - j$.

4. On note P, Q, R les images respectives des nombres complexes $1, j$ et j^2 dans le plan.

Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier la réponse.

Partie B.

Soit a, b, c trois nombres complexes vérifiant l'égalité $a + jb + j^2c = 0$.

On note A, B, C les images respectives des nombres a, b, c dans le plan.

1. En utilisant la question A) ??, démontrer l'égalité : $a - c = j(c - b)$.

2. En déduire que $AC = BC$.

3. Démontrer l'égalité : $a - b = j^2(b - c)$.

4. En déduire que le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 2 : (3 points)

1. Exprimer $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

2. En utilisant les formules d'Euler, exprimer $\sin^3(x)$ en fonction de $\sin(x)$ et $\sin(3x)$.

3. En utilisant la formule de Moivre, exprimer $\cos(4x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.



Bon courage!