Devoir Maison n°3

Exercice 1 : (6 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes. Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. Proposition : Pour tout entier naturel n :
$$(1+\mathrm{i})^{4n} = (-4)^n.$$
2. Soit (E) l'équation $(z-4)\left(z^2-4z+8\right)=0$ où z désigne un nombre complexe.
Proposition : Les points dont les affixes sont les solutions, dans $\mathbb{C}$, de (E) sont les sommets d'un triangle d'aire 8.
3. Proposition : Pour tout nombre réel α :
$$1+\mathrm{e}^{2i\alpha} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\cos(\alpha).$$
4. Soit A le point d'affixe $z_{\mathrm{A}} = \dfrac{1}{2}(1+\mathrm{i})$ et M_n le point d'affixe $(z_{\mathrm{A}})^n$ où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Proposition : si $n-1$ est divisible par 4, alors les points O, A et M_n sont alignés.
5. Soit j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{2\pi}{3}$.
Proposition : $1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2=0$.
6. Soient A, B, C trois points d'affixes a, b, c distinctes deux à deux.
Proposition : Le triangle ABC est isocèle en A si et seulement si $\left|\frac{b-a}{c-a}\right|=1$.

Exercice 2 : (4 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. À tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' définie par :
$$z' = z^2+4z+3.$$

1. Un point M est dit invariant lorsqu'il est confondu avec le point M' associé. Démontrer qu'il existe deux points invariants. Donner l'affixe de chacun de ces points sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.
2. Soit A le point d'affixe $\dfrac{-3-i\sqrt{3}}{2}$ et B le point d'affixe $\dfrac{-3+i\sqrt{3}}{2}$. Montrer que OAB est un triangle équilatéral.
3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe $z=x+iy$ où x et y sont réels, tels que le point M' associé soit sur l'axe des réels.
4. Dans le plan complexe, représenter les points A et B ainsi que l'ensemble $\mathcal{E}$.