

Devoir Maison n°3

Exercice 1 : (6 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On note \mathbb{C} l'ensemble des nombres complexes.

1. Pour tout entier naturel n , on a :

$$\begin{aligned} (1+i)^{4n} &= ((1+i)^4)^n \\ &= \left[((1+i)^2)^2 \right]^n \\ &= \left[(1^2 + 2i + i^2)^2 \right]^n \\ &= \left[(1 + 2i - 1)^2 \right]^n \\ &= \left[(2i)^2 \right]^n \\ &= (-4)^n. \end{aligned}$$

Ainsi, la proposition 1 est vraie..

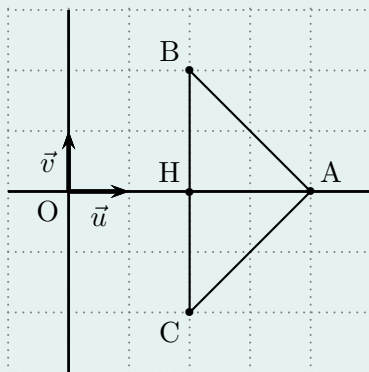
2. Résolvons l'équation (E): $(z-4)(z^2-4z+8)=0$.

$$\begin{aligned} (E) &\Leftrightarrow z-4=0 \text{ ou } z^2-4z+8=0 \quad (E') \\ &\Leftrightarrow z=4 \text{ ou } z^2-4z+8=0. \end{aligned}$$

Le discriminant de l'équation (E') est égal à $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 8 = 16 - 32 = -16 < 0$. Cette équation admet alors deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-(-4) + i\sqrt{16}}{2} = \frac{4+4i}{2} = 2+2i \text{ et } z_2 = 2-2i. \text{ Ainsi, } S = \{4, 2+2i, 2-2i\}.$$

Ci-après une représentation dans un plan complexe les points dont les affixes sont les solutions de (E).



Le triangle ABC est isocèle en A car les points B et C sont symétriques par rapport à l'axe (O, \vec{u}) et A appartient à cet axe. Ainsi, le milieu H de [BC] est le projeté orthogonal de A sur [BC] (ou bien le pied de la hauteur issue de A dans le triangle). On déduit alors que H a pour affixe 2 et donc $AH=2$. Par ailleurs,

$$BC = |2+2i - 2+2i| = |4i| = 4.$$

En conséquence, l'aire du triangle ABC est égale

$$\text{à : } \frac{BC \times AH}{2} = \frac{4 \times 2}{2} = 4.$$

La proposition 2 est donc fautive.

3. Soit α un nombre réel quelconque. On sait que : $1 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$. Dès lors,

$$\begin{aligned} 1 + e^{2i\alpha} &= 1 + (e^{i\alpha})^2 \\ &= 1 + (\cos \alpha + i \sin \alpha)^2 \\ &= 1 + \cos^2 \alpha + 2i \sin \alpha \cos \alpha + i^2 \sin^2 \alpha \\ &= \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2i \sin \alpha \cos \alpha - \sin^2 \alpha \\ &= 2 \cos^2 \alpha + 2i \sin \alpha \cos \alpha \\ &= 2(\cos \alpha + i \sin \alpha) \cos \alpha \\ &= 2e^{i\alpha} \cos \alpha. \end{aligned}$$

La proposition 3 est ainsi vraie.

La deuxième méthode consistant à factoriser par $e^{i\alpha}$ puis à appliquer une formule d'Euler est souvent utilisée en classe. Je continue à conseiller cette dernière.

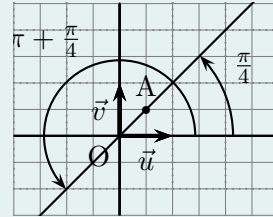
Exercice 1 : (suite)

4. On a :

$$\begin{aligned} z_A &= \frac{1}{2}(1 + i) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right). \end{aligned}$$

Ainsi, le nombre complexe z_A a pour argument $\frac{\pi}{4}$ modulo 2π . Et selon la formule de Moivre $(z_A)^n$ a pour argument $\frac{n\pi}{4}$ modulo 2π .

Les points O , A et M_n sont alignés si et seulement si l'argument de l'affixe de M_n est $\frac{\pi}{4}$ ou $\pi + \frac{\pi}{4}$ modulo 2π .



Par ailleurs, si $n - 1$ est divisible par 4 alors il existe entier k tel que $n - 1 = 4k$, soit $n = 4k + 1$. Dès lors, M_{4k+1} a pour argument $(4k + 1)\frac{\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{4} [2\pi]$. Ce qui est cohérent avec le résultat obtenu.

En conséquence, lorsque $n - 1$ est divisible par 4, les points O , A et M_n sont bel et bien alignés. La proposition 4 est donc bien vraie.

5. Le nombre j a pour module 1 et argument $\frac{2\pi}{3}$ donc,

$$\begin{aligned} 1 + j + j^2 &= 1 + e^{\frac{2\pi}{3}i} + e^{\frac{4\pi}{3}i} \\ &= 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{i}{2} - \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

La proposition 5 est ainsi vraie.

6. Soient A, B, C trois points d'affixes a, b, c distinctes deux à deux. Ainsi, $AB = |b - a|$ et $AC = |c - a|$.

Si, le triangle ABC est isocèle en A alors $AB = AC$ soit $|b - a| = |c - a|$ et donc $\frac{|b - a|}{|c - a|} = \frac{|b - a|}{|c - a|} = 1$.

Réciproquement, si $\frac{|b - a|}{|c - a|} = 1$ alors $\frac{|b - a|}{|c - a|} = 1$ soit $|b - a| = |c - a|$. Autrement dit, le triangle ABC est isocèle en A .

La proposition 6 est donc vraie.

Exercice 2 : (4 points)

1. Pour tout entier n , on a :

$$\begin{aligned} (n - 1)^3 + n^3 + (n + 1)^3 &= n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\ &= 3n^3 + 6n \\ &= 3n(n^2 + 2). \end{aligned}$$

Dès lors, pour montrer que $9|(n - 1)^3 + n^3 + (n + 1)^3$, il suffit de montrer que pour tout entier n , $3|n(n^2 + 2)$. Utilisons pour cela, le raisonnement par disjonction de cas.

Soit p un entier.

Si $n = 3p$, alors :

$$n(n^2 + 2) = 3 [p ((3p)^2 + 2)]$$

ce qui implique que $3|n(n^2 + 2)$.

Exercice 2 : (suite)

Si $n = 3p + 1$, alors :

$$n(n^2 + 2) = (3p + 1) [(3p + 1)^2 + 2] = (3p + 1) [9p^2 + 6p + 1 + 2] = 3(3p + 1) [3p^2 + 2p + 1]$$

ce qui implique également que $3|n(n^2 + 2)$.

Si $n = 3p + 2$, alors :

$$n(n^2 + 2) = (3p + 2) [(3p + 2)^2 + 2] = (3p + 2) [9p^2 + 12p + 4 + 2] = 3(3p + 2) [3p^2 + 4p + 2]$$

ce qui implique également que $3|n(n^2 + 2)$.

D'où le résultat.

2. Dans $1002!$, il y a 334 multiples de 3, on peut alors factoriser ainsi :

$$\begin{aligned} & 1002! \\ &= 3^{334} (1 \times 2 \times 1 \times 4 \times 5 \times 2 \times 7 \times 8 \times 3 \times 10) \times \cdots \times (991 \times 992 \times 331 \cdots \times 333 \times 1000) \times 1001 \times 334 \\ &= 3^{334} \times 1 \times 2 \times \cdots \times 334 \times \underbrace{1 \times 2 \times 4 \times 5 \times \cdots \times 1001}_{\text{aucun multiples de 3}} \\ &= 3^{334} \times 334! \times N_1, \quad \text{avec } N_1 \text{ non multiple de 3.} \end{aligned}$$

De plus, dans $334!$, il y a 111 multiples de 3 donc, avec le même raisonnement, on a :

$$334! = 3^{111} \times 111! \times N_2, \quad \text{avec } N_2 \text{ non multiple de 3.}$$

On voit apparaître $111!$ dans lequel il y a 37 multiples de 3 (3, 6, 9, ..., 99, 102, 105, 108, 111). On peut donc écrire :

$$111! = 3^{37} \times 37! \times N_3, \quad \text{avec } N_3 \text{ non multiple de 3.}$$

De même, on voit $37!$ apparaître, où il y a 12 multiples de 3 donc on peut écrire :

$$37! = 3^{12} \times 12! \times N_4, \quad \text{avec } N_4 \text{ non multiple de 3.}$$

On voit $12!$ apparaître, où il y a 4 multiples de 3 donc on peut écrire :

$$12! = 3^4 \times 4! \times N_5, \quad \text{avec } N_5 \text{ non multiple de 3.}$$

On voit apparaître $4!$ où il y a 1 multiple de 3 et on peut écrire :

$$4! = 3^1 (1 \times 2 \times 1 \times 4).$$

Finalement, $1002!$ est un multiple de $3^{334+111+37+12+4+1} = 3^{499}$.

Autrement dit, par construction, le plus grand entier n tel que 3^n divise $1002!$ est $n = 499$.

3. Pour tout $(x; y) \in \mathbb{N}^2$, $9x^2 - y^2 = 32 \Leftrightarrow (3x - y)(3x + y) = 32$. De plus, 1; 32; 2; 16; 4 et 8 sont les diviseurs de 32 dans \mathbb{N} . Dès lors,

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 3x - y = 1 \\ 3x + y = 32 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 3x - y = 32 \\ 3x + y = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 3x - y = 2 \\ 3x + y = 16 \end{cases} \\ & \text{ou} \quad \begin{cases} 3x - y = 16 \\ 3x + y = 2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 3x - y = 4 \\ 3x + y = 8 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 3x - y = 8 \\ 3x + y = 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Parmi les susdits systèmes seuls ces deux là $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 3x + y = 16 \end{cases}$ et $\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 3x + y = 8 \end{cases}$ admettent une solution dans \mathbb{N}^2 .

En effet, en additionnant membre à membre les deux équations du premier système, on obtient : $6x = 18$, soit $x = 3$ et donc par substitution $y = 7$.

Et, en additionnant membre à membre les deux équations du deuxième système, on obtient : $6x = 12$, soit $x = 2$ et donc par substitution $y = 2$.

En conséquence, $S = \{(2; 2), (3; 7)\}$.

Exercice 2 : (suite)

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition $\mathcal{P}(n) : 609|5^{4n} - 2^{4n}$.

- Initialisation : Pour $n = 0$, on a $5^{4 \times 0} - 2^{4 \times 0} = 1 - 1 = 0$ et $609 | 0$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain n et montrons $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

Par hypothèse de récurrence, il existe un entier naturel k tel que $5^{4n} - 2^{4n} = 609k$ soit, $5^{4n} = 2^{4n} + 609k$.

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}5^{4(n+1)} - 2^{4(n+1)} &= 5^{4n+4} - 2^{4n+4} \\&= 5^4 \times 5^{4n} - 2^4 \times 2^{4n} \\&= 625 \times 5^{4n} - 16 \times 2^{4n} \\&= 625 \times (2^{4n} + 609k) - 16 \times 2^{4n} \\&= 609 \times 2^{4n} + 609 \times 625k \\&= 609(2^{4n} + 625k).\end{aligned}$$

Ce qui implique que $609 | 5^{4(n+1)} - 2^{4(n+1)}$. Autrement dit, la proposition est héréditaire.

- Conclusion : Selon le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , $609|5^{4n} - 2^{4n}$.

