Devoir Maison n°3

Exercice 1 : (6 points)

Soit p un nombre premier impair. On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $x^2 \equiv 2\ [p]$.

1. (a) Montrer que : $2^{p-1} \equiv 1\ [p]$.

   (b) En déduire que : $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1\ [p]$ ou $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1\ [p]$.
   (On remarque que : $\left(2^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(2^{\frac{p-1}{2}} + 1\right) = 2^{p-1} - 1$.)
2. Soit x une solution de l'équation (E).

   (a) Montrer que p et x sont premiers entre eux.

   (b) En déduire que : $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p]$. (On pourra utiliser le théorème de Fermat).
3. Montrer que pour tout $k \in \{1, 2, \cdots, p-1\}$, p divise $\binom{p}{k}$.
4. (a) En utilisant la formule de Moivre, montrer que :

   $$(1+i)^p = 2^{\frac{p}{2}} \cos\left(\frac{p\pi}{4}\right) + i 2^{\frac{p}{2}} \sin\left(\frac{p\pi}{4}\right)$$

   avec, i le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

   (b) On admet que : $(1+i)^p = \sum_{k=0}^{k=\frac{p-1}{2}} (-1)^k \binom{p}{2k} + i \sum_{k=0}^{k=\frac{p-1}{2}} (-1)^k \binom{p}{2k+1}$.
   Montrer que : $2^{\frac{p}{2}} \cos\left(\frac{p\pi}{4}\right) \in \mathbb{Z}$ et $2^{\frac{p}{2}} \cos\left(\frac{p\pi}{4}\right) \equiv 1\ [p]$.
5. En déduire que si $p \equiv 5\ [8]$ alors l'équation (E) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 2 : (4 points)

Tout entier naturel a s'écrit sous la forme :

$$a = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + a_1 \times 10 + a_0,$$

avec pour tout i, $a_i \in \mathbb{N}$ et $a_i < 10$. Cette écriture en base de 10, est souvent notée comme suit $\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0}$. Démontrer les propriétés suivantes.

1. $a \equiv a_0\ [2]$.
2. $a \equiv \sum_{i=0}^{n} a_i\ [3]$.
3. $a \equiv 10 \times a_1 + a_0\ [4]$.
4. $a \equiv a_0\ [5]$.
5. $a \equiv \sum_{i=0}^{n} a_i\ [9]$.