

DEVOIR MAISON N°2

Exercice 1 : (5 points)

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

- Déterminer une matrice diagonale B et une autre matrice C telle que $A = B + C$.
- (a) Pour tout entier n , donner l'expression de B^n .
(b) Vérifier que B et C sont commutatives.
(c) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$A^n = B^n + nCB^n + \binom{n}{2}C^2B^{n-2}.$$

Exercice 2 : (5 points)

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie A.

- Déterminer la matrice M^2 .
- On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}$.

Vérifier que $M^3 = M^2 + 8M + 6I$.

- En déduire que M est inversible et que :

$$M^{-1} = \frac{1}{6} (M^2 - M - 8I).$$

Partie B.

On cherche à déterminer trois nombres entiers a , b et c tels que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points A(1; 1), B(-1; -1) et C(2; 5).

- Démontrer que le problème revient à chercher trois entiers a , b et c tels que

$$M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

- Calculer les nombres a , b et c et vérifier que ces nombres sont des entiers.



Bon courage!