Devoir Maison n°2

Exercice 1 : (7 points)

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ avec a réel strictement positif. Le but est de déterminer $M^{1\,000}$ de trois façons.

1. (a) Calculer M^2, M^3 et M^4.
   (b) Conjecturer puis démontrer l'expression de M^n en fonction de n. En déduire $M^{1\,000}$.
2. (a) Vérifier que $M^2 = 2M - I$.
   (b) En déduire M^3 et M^4 en fonction de M et I.
   (c) Conclure.
3. (a) Déterminer la matrice A telle que $M = I + A$.
   (b) Calculer A^2.
   (c) En déduire M^2, M^3 et M^4 en fonction de A et I.
   (d) Exprimer $M^{1\,000}$ en fonction de A et I.
   (e) Conclure.

Exercice 2 : (3 points)

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Soit la matrice $B = A - D$. Calculer B^2 et B^3.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, on a :

$$A^n = (-1)^n \left(I_3 - nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2 \right).$$