

Devoir Maison n°2

Exercice 1 : (7 points)

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ avec a réel strictement positif. Le but est de déterminer M^{1000} de trois façons.

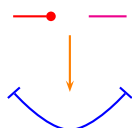
- (a) Calculer M^2, M^3 et M^4 .
(b) Conjecturer puis démontrer l'expression de M^n en fonction de n . En déduire M^{1000} .
- (a) Vérifier que $M^2 = 2M - I$.
(b) En déduire M^3 et M^4 en fonction de M et I .
(c) Conclure.
- (a) Déterminer la matrice A telle que $M = I + A$.
(b) Calculer A^2 .
(c) En déduire M^2, M^3 et M^4 en fonction de A et I .
(d) Exprimer M^{1000} en fonction de A et I .
(e) Conclure.

Exercice 2 : (3 points)

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- Soit la matrice $B = A - D$. Calculer B^2 et B^3 .
- Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geq 3$, on a :

$$A^n = (-1)^n \left(I_3 - nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2 \right).$$



Bon courage!