

Corrigé : Devoir Maison n°2

Exercice 1 : (7 points)

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ avec a réel strictement positif. Le but est de déterminer M^{1000} de trois façons.

1. (a) $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2a & 1 \end{pmatrix}.$

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3a & 1 \end{pmatrix}.$$

$$M^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4a & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Conjecture : Pour tout entier naturel n , on a : $\mathcal{P}(n) : M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix}.$

Initialisation : Pour $n = 0$, on a : $M^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$

Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n \times M \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 0 \times a & 1 \times 0 + 0 \times 1 \\ na \times 1 + 1 \times a & na \times 0 + 1 \times 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (n+1)a & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusion : Selon le principe de récurrence, on déduit que, $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ na & 1 \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}.$

En conséquence, $M^{1000} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1000a & 1 \end{pmatrix}.$

2. (a) $2M - I = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2a & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2a & 1 \end{pmatrix} = M^2.$

(b) $M^3 = 3M - 2I$ et $M^4 = 4M - 3I.$

(c) Pour tout entier naturel n , on a : $M^n = nM - (n-1)I.$

3. (a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}.$ Ainsi, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}.$

(b) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

(c) $M^2 = (I + A)^2 = I^2 + I \times A + A \times I + A^2 = I + 2A$, car $IA = AI$ et $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

$$M^3 = (I + A)^3 = (I + A)^2 \times (I + A) = (I + 2A)(I + A) = I^2 + 2IA + AI + 2A^2 = I + 3A,$$

car $IA = AI$ et $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

$$M^4 = (I + A)^4 = (I + A)^3 \times (I + A) = (I + 3A)(I + A) = I^2 + 3IA + AI + 3A^2 = I + 4A,$$

car $IA = AI$ et $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

(d) $M^{1000} = I + 1000A.$

(e) Pour tout entier naturel n , $M^n = I + nA.$

► Exercice 2 : (3 points)

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Soit la matrice $B = A - D$. Ainsi

$$\begin{aligned} B^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B^3 &= B^2 \times B \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. On sait que : $A = B + D$. De plus, $DB = BD$, car $D = -I_3$. On peut alors utiliser la formule du binôme de Newton.

$$\begin{aligned} A^n &= (B + D)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k D^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k \times (-1)^{n-k} I^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} B^k \\ &= \binom{n}{0} (-1)^n B^0 + \binom{n}{1} (-1)^{n-1} B^1 + \binom{n}{2} (-1)^{n-2} B^2, \quad \text{car } B^k = 0, \forall k \geq 3 \\ &= (-1)^n I_3 + (-1)^{n-1} n B + (-1)^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} B^2, \quad \text{car } \binom{n}{0} = 1, \binom{n}{1} = n, \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \\ &= (-1)^n \left(I_3 - n B + \frac{n(n-1)}{2} B^2 \right). \end{aligned}$$

