Lycée Evariste Galois ❖❖❖ Maths Expertes ❖❖❖ maths-mde.fr

Devoir Maison n°2

Exercice 1 : (3 points)

On définit la suite de nombres complexes (z_n) par $z_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \dfrac{1}{3}z_n + \dfrac{2}{3}i$.
Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = z_n - i$.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n pour tout entier naturel n.
2. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n (1 - i)$.
3. En déduire l'expression de z_n en fonction de n.

Exercice 2 : (3 points)

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A - I$.

1. Calculer B^2 et B^3.
2. (a) Peut-on utiliser la formule du binôme de Newton pour développer l'expression $(I + B)^n$? Justifier.

   (b) Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 3$:

$$A^n = \binom{n}{0}I + \binom{n}{1}B + \binom{n}{2}B^2.$$

Exercice 3 : (4 points)

Soit P le polynôme défini par $\quad P(z) = z^3 + 2(1 - i)z^2 + (1 - 4i)z - 2i.$

1. Trouver le réel α tel que $P(i\alpha) = 0$.
2. Trouver les nombres complexes p et q tels que $P(z) = (z - i\alpha)(z^2 + pz + q)$.
3. En déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$.