Devoir Maison n°1

Exercice 1 : (5 points)

On définit une fonction f de $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$f(z) = \frac{z-1}{z-i}.$$

1. Démontrer que 1 n'a aucun antécédent par f.
2. Déterminer l'antécédent de i par la fonction f.
3. On pose $z = x + iy$. Vérifier qu'on a alors :

$$f(z) = \frac{(x^2+y^2-x-y)+i(x+y-1)}{x^2+(y-1)^2}.$$

4. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe. $z = x + iy$ du plan tels que $f(z)$ est un nombre réel.
5. Même question pour avoir $f(z)$ imaginaire pur.
   Indication : Si le plan est muni d'un repère orthonormé et si les coordonnées de C dans ce repère sont (x_C, y_C) alors l'équation du cercle de centre C et de rayon r est donnée par :

$$(x-x_C)^2+(y-y_C)^2 = r^2.$$

Exercice 2 : (5 points)

Pour tout nombre complexe z, on pose :

$$f(z) = z^4 - 10z^3 + 38z^2 - 90z + 261.$$

1. Démontrer que si z est solution de l'équation $f(z) = 0$, alors son conjugué $\overline{z}$ l'est aussi.
2. Soit $b \in \mathbb{R}$, exprimer en fonction de b les parties réelle et imaginaire de $f(bi)$.
3. En déduire que l'équation $f(z) = 0$ admet deux solutions imaginaires pures.
4. Démontrer qu'il existe deux nombres réels α et β que l'on déterminera, tels que pour tout nombre complexe z on ait
$$f(z) = (z^2+9)(z^2+\alpha z+\beta).$$
5. Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.