Corrigé : Devoir Maison n°1

Exercice 1 : (5 points)

On définit une fonction f de $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ dans $\mathbb{C}$ par : $f(z) = \dfrac{z-1}{z-i}$.

1. Supposons qu'il existe un nombre complexe tel que : $f(z) = 1$. Ainsi, pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$,

$$\begin{aligned} \frac{z-1}{z-i} = 1 \quad &\Rightarrow \quad z-1 = z-i \\ &\Rightarrow \quad -1 = -i. \end{aligned}$$

   Absurde. En conséquence, 1 n'admet aucun antécédent par f.

2. Déterminer l'antécédent de i par la fonction f revient à résoudre l'équation $f(z) = i$. Ainsi, pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$,

$$\begin{aligned} \frac{z-1}{z-i} = i \quad &\Leftrightarrow \quad z-1 = i(z-i) \\ &\Leftrightarrow \quad z-1 = iz+1 \\ &\Leftrightarrow \quad z - iz = 2 \\ &\Leftrightarrow \quad z = \frac{2}{1-i} \\ &\Leftrightarrow \quad z = \frac{2(1+i)}{1-i^2} \\ &\Leftrightarrow \quad z = 1+i. \end{aligned}$$

   On déduit alors que $1+i$ est l'antécédent de i par f.

3. En posant $z = x+iy$, on obtient :

$$\begin{aligned} f(x+iy) \quad &= \quad \frac{x+iy-1}{x+iy-i} \\ &= \quad \frac{x-1+iy}{x+(y-1)i} \\ &= \quad \frac{(x-1+iy)(x-(y-1)i)}{(x+(y-1)i)(x-(y-1)i)} \\ &= \quad \frac{x^2-x(y-1)i-x+(y-1)i+iyx+y(y-1)}{x^2+(y-1)^2} \\ &= \quad \frac{(x^2+y^2-x-y)+i(x+y-1)}{x^2+(y-1)^2}. \end{aligned}$$

4. $f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(f(z)) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+y-1}{x^2+(y-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x+y-1 = 0$ avec $x \neq 0$ et $y \neq 1$.

   Dès lors, l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $Im(f(z)) = 0$ est la droite d'équation $x+y-1=0$ privée du point d'affixe i.

5. $f(z)$est imaginaire pur $\Leftrightarrow Re(f(z)) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+y^2-x-y}{x^2+(y-1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2-x-y = 0$ avec $x \neq 0$ et $y \neq 1$.

   Par ailleurs, $x^2+y^2-x-y = 0 \Leftrightarrow \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$

   En conséquence, l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $Re(f(z)) = 0$ est le cercle, de centre $C\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{i}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, privée du point d'affixe i.

Exercice 2 : (5 points)

Pour tout nombre complexe, z, on pose

$$f(z) = z^4 - 10z^3 + 38z^2 - 90z + 261.$$

1. z est solution de l'équation $f(z) = 0$, alors $\overline{f(z)} = \overline{0}$. Dès lors, par linéarité du conjugué, on obtient :

$$\begin{aligned}\overline{z^4 - 10z^3 + 38z^2 - 90z + 261} = 0 &\Leftrightarrow \overline{z}^4 - 10\overline{z}^3 + 38\overline{z}^2 - 90\overline{z} + 261 = 0\\ &\Leftrightarrow f(\overline{z}) = 0.\end{aligned}$$

   Ainsi, $\overline{z}$ est bel et bien une solution de l'équation $f(z) = 0$.

2. Pour tout réel b, on a :

$$\begin{aligned}f(bi) &= (bi)^4 - 10(bi)^3 + 38(bi)^2 - 90bi + 261\\ &= b^4 + 10b^3i - 38b^2 - 90bi + 261\\ &= b^4 + 10b^3i - 38b^2 - 90bi + 261\\ &= b^4 - 38b^2 + 261 + i(10b^3 - 90b).\end{aligned}$$

   Ainsi, $Re(f(bi)) = b^4 - 38b^2 + 261$ et $Im(f(z)) = 10b^2 - 90b$.

3. Pour déduire les solutions imaginaires pures, il suffit de résoudre l'équation $f(ib) = 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned}b^4 - 38b^2 + 261 + i(10b^3 - 90b) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} b^4 - 38b^2 + 261 = 0\\ 10b^3 - 90b = 0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b^4 - 38b^2 + 261 = 0\\ 10b(b^2 - 9) = 0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b^4 - 38b^2 + 261 = 0\\ 10b(b-3)(b+3) = 0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b^4 - 38b^2 + 261 = 0\\ 10b = 0 \text{ où } b - 3 = 0 \text{ où } b + 3 = 0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b^4 - 38b^2 + 261 = 0\\ 10b = 0 \text{ où } b = 3 \text{ où } b = -3.\end{cases}\end{aligned}$$

   Par ailleurs, on remarque que : $3^4 - 38 \times 3^2 + 261 = 0$ et $(-3)^4 - 38 \times (-3)^2 + 261 = 0$. En conséquence, $f(3i) = f(-3i) = 0$. Autrement dit, $-3i$ et $3i$ sont deux solutions purement imaginaires de l'équation $f(z) = 0$.

4. Par développement, on a :

$$\begin{aligned}f(z) &= (z^2 + 9)(z^2 + \alpha z + \beta).\\ &= z^4 + \alpha z^3 + \beta z^2 + 9z^2 + 9\alpha z + 9\beta\\ &= z^4 + \alpha z^3 + (\beta + 9)z^2 + 9\alpha z + 9\beta.\end{aligned}$$

   Dès lors, par principe d'identification des coefficients, on obtient :

$$\begin{cases}\alpha = -10\\ \beta + 9 = 38\\ 9\alpha = -90\\ 9\beta = 261\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha = -10\\ \beta = 38 - 9\\ \alpha = \frac{90}{9}\\ \beta = \frac{261}{9}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha = -10\\ \beta = 29\end{cases}.$$

   En conséquence, il existe en effet deux réels α et β permettant la factorisation ci-après :

$$f(z) = (z^2 + 9)(z^2 - 10z + 29).$$

Exercice 2 : (suite)

5. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$ revient à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation produit nul :

$$(z^2 + 9)(z^2 - 10z + 29) = 0.$$

Or, un produit est nul si au moins l'un de ses facteurs est nul, donc $z^2+9 = 0$ ou $z^2-10z+29 = 0$.
Par ailleurs le discriminant de l'équation $(E) \quad : \quad z^2 - 10z + 29 = 0$ est égal à :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \times 1 \times 29 = 100 - 116 = -16.$$

L'équation (E) admet alors deux solutions dans $\mathbb{C}$:

$$z_3 = \frac{10 - i\sqrt{16}}{2} = 5 - 2i \quad \text{et} \quad z_4 = \frac{10 + i\sqrt{16}}{2} = 5 + 2i$$

Par ailleurs, dans la question 3, nous avons prouvé que $-3i$ et $3i$ sont deux solutions de $f(z) = 0$, ce sont en effet les solutions de l'équation $z^2 + 9 = 0$.
Par conséquent : $S = \{-3i; 3i; 5 - 2i; 5 + 2i\}$.