Devoir Maison n°1

Exercice 1 : (3 points)

1. Calculer i^n en distinguant plusieurs cas selon les valeurs de l'entier naturel n.
2. En déduire selon les valeurs de n, la valeur de :
   (a) la somme $1 + i + i^2 + \cdots + i^n$.
   (b) le produit $1 \times i \times i^2 \times \cdots \times i^n$.

Exercice 2 : (7 points)

Dans cet exercice, on cherche à résoudre une équation (E) : $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, avec a, b et c trois réels.

1. En posant $X = x + \frac{a}{3}$, montrer que résoudre (E) revient à résoudre (E') : $X^3 + pX + q = 0$. On donnera l'expression de p et q en fonction de a, b et c.
2. (a) On pose $X = u + v$. Montrer que si $\begin{cases} u^3 + v^3 = -q, \\ u \times v = -\dfrac{p}{3} \end{cases}$, alors X est solution de (E').
   (b) Posons $U = u^3$ et $V = v^3$. X est solution de (E'). Montrer que résoudre le système $\begin{cases} u^3 + v^3 = -q, \\ u \times v = -\dfrac{p}{3} \end{cases}$ revient à résoudre $\begin{cases} U + V = -q, \\ U \times V = -\dfrac{p^3}{27} \end{cases}$.
   (c) On pose $\Delta = \dfrac{27q^2 + 4p^3}{27}$. En supposant $\Delta > 0$, déterminer un couple $(U; V)$ solution du système (on exprimera U et V en fonction de p et q).
   (d) En déduire que si $\Delta > 0$, alors
   $$x_0 = \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2}}$$
   est une solution réelle de (E').