Devoir Maison n°1

Exercice 1 : (3 points)

1. Raisonnement par disjonction de cas. Soit p un entier naturel.
   Si $n = 4p$, alors $i^{4p} = (i^2)^2 = (-1)^{2p} = 1$.
   Si $n = 4p+1$, alors $i^{4p+1} = i^{4p} \times i = i$.
   Si $n = 4p+2$, alors $i^{4p+2} = i^{4p} \times i^2 = -1$.
   Si $n = 4p+3$, alors $i^{4p+3} = i^{4p} \times i^2 \times i = -i$.

2. Soit $p \in \mathbb{N}$.

   (a) On sait que : $1 + i + i^2 + \cdots + i^n = \dfrac{i^{n+1} - 1}{i - 1}$. Ainsi,

   si $n = 4p$, alors $1 + i + i^2 + \cdots + i^{4p} = \dfrac{i^{4p+1} - 1}{i - 1} = \dfrac{i^{4p} \times i - 1}{i - 1} = 1$;

   si $n = 4p+1$, alors $1 + i + i^2 + \cdots + i^{4p} = \dfrac{i^{4p+2} - 1}{i - 1} = \dfrac{i^{4p} \times i^2 - 1}{i - 1} = \dfrac{-2}{i - 1} = 1 + i$;

   si $n = 4p+2$, alors alors $1 + i + i^2 + \cdots + i^{4p} = \dfrac{i^{4p+3} - 1}{i - 1} = \dfrac{i^{4p} \times i^3 - 1}{i - 1} = \dfrac{-i - 1}{i - 1} = i$;

   si $n = 4p+3$, alors $1 + i + i^2 + \cdots + i^{4p} = \dfrac{i^{4p+4} - 1}{i - 1} = \dfrac{i^{4p} \times i^4 - 1}{i - 1} = \dfrac{1 - 1}{i - 1} = 0$.

   (b) On sait que : $1 \times i \times i^2 \times \cdots \times i^n = i^{1+2+\cdots+n} = i^{\frac{n(n+1)}{2}}$. Ainsi,

   si $n = 8p$, alors $i^{\frac{8p(8p+1)}{2}} = i^{4p(8p+1)} = (i^4)^{p(8p+1)} = 1$;

   si $n = 8p+1$, alors $i^{\frac{(8p+1)(8p+2)}{2}} = i^{(8p+1)(4p+1)} = i^{32p^2+12p+1} = (i^4)^{8p^2+3p} \times i = i$;

   si $n = 8p+2$, alors $i^{\frac{(8p+2)(8p+3)}{2}} = i^{(8p+3)(4p+1)} = i^{32p^2+20p+3} = (i^4)^{8p^2+5p} \times i^3 = -i$;

   si $n = 8p+3$, alors $i^{\frac{(8p+3)(8p+4)}{2}} = i^{(8p+3)(4p+2)} = i^{32p^2+28p+6} = (i^4)^{8p^2+7p} \times i^6 = -1$;

   si $n = 8p+4$, alors $i^{\frac{(8p+4)(8p+5)}{2}} = i^{(8p+5)(4p+2)} = i^{32p^2+36p+10} = (i^4)^{8p^2+9p} \times i^{10} = -1$;

   si $n = 8p+5$, alors $i^{\frac{(8p+5)(8p+6)}{2}} = i^{(8p+5)(4p+3)} = i^{32p^2+52p+15} = (i^4)^{8p^2+13p} \times i^{15} = -i$;

   si $n = 8p+6$, alors $i^{\frac{(8p+6)(8p+7)}{2}} = i^{(8p+7)(4p+3)} = i^{32p^2+52p+21} = (i^4)^{8p^2+13p} \times i^{21} = i$;

   si $n = 8p+7$, alors $i^{\frac{(8p+7)(8p+8)}{2}} = i^{(8p+7)(4p+4)} = i^{32p^2+60p+28} = (i^4)^{8p^2+15p} \times i^{28} = 1$.

Exercice 2 : (7 points)

Dans cet exercice, on cherche à résoudre une équation (E) : $x^3+ax^2+bx+c=0$, avec a, b et c trois réels.

1. On pose $X = x+\dfrac{a}{3}$. Dès lors,

$$\begin{aligned}
(E) \quad &\Leftrightarrow \quad \left(X-\frac{a}{3}\right)^3 + a\left(X-\frac{a}{3}\right)^2 + b\left(X-\frac{a}{3}\right)+c=0\\
&\Leftrightarrow \quad X^3+3X^2\times\frac{-a}{3}+3X\times\left(-\frac{a}{3}\right)^2+\left(-\frac{a}{3}\right)^3+a\left(X^2-\frac{2}{3}aX+\frac{a^2}{9}\right)+bX-\frac{ba}{3}+c=0\\
&\Leftrightarrow \quad X^3-aX^2+\frac{a^2}{3}X-\frac{a^3}{27}+aX^2-\frac{2}{3}a^2X+\frac{a^3}{9}+bX-\frac{ba}{3}+c=0\\
&\Leftrightarrow \quad X^3+\frac{a^2}{3}X+\left(b-\frac{1}{3}a^2\right)X+\frac{2}{27}a^3-\frac{ba}{3}+c=0.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\begin{cases} p = b-\dfrac{1}{3}a^2, \\ q=\dfrac{2}{27}a^3-\dfrac{ba}{3}+c \end{cases}$.

2. (a) On pose $X=u+v$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
X^3+pX+q &= (u+v)^3+p(u+v)+q\\
&= u^3+v^3+3uv(v+u)+p(u+v)+q\\
&= -q+3\times\frac{-p}{3}(u+v)+p(u+v)+q\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent, X est en effet une solution de (E') lorsque $\begin{cases} u^3+v^3=-q, \\ u\times v = -\dfrac{p}{3} \end{cases}$.

(b) En Posant $U=u^3$ et $V=v^3$, on obtient : $\begin{cases} U+V=u^3+v^3=-q \\ UV=(u\times v)^3=\left(-\dfrac{p}{3}\right)^3=-\dfrac{p^3}{27} \end{cases}$.

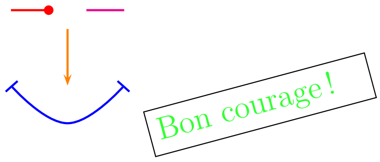
Ainsi, Résoudre le système $\begin{cases} u^3+v^3=-q, \\ u\times v=-\dfrac{p}{3} \end{cases}$ revient à résoudre $\begin{cases} U+V=-q, \\ U\times V=-\dfrac{p^3}{27} \end{cases}$.

(c) On sait que U et V sont les deux racines du trinôme $x^2-(U+V)x+UV$. Autrement dit, U et V sont les deux racines du trinôme, $x^2+qx-\dfrac{p^3}{27}$. $(*)$

Le discriminant du trinôme $(*)$ est égal à : $\Delta = b^2-4ac = q^2+\dfrac{4p^3}{27}=\dfrac{27q^2+4p^3}{27}$.

Lorsque $\Delta>0$, ce trinôme admet deux racines : $U=\dfrac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}$ et $V=\dfrac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}$.

(d) On sait que $X=u+v=\sqrt[3]{U}+\sqrt[3]{V}$ est une solution de (E'). Autrement dit, lorsque $\Delta>0$, $\sqrt[3]{\dfrac{-q-\sqrt{\Delta}}{2}}+\sqrt[3]{\dfrac{-q+\sqrt{\Delta}}{2}}$ est une solution réelle de (E').


Bon courage!