Devoir Maison n°1

Exercice 1 : (4 points)

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre-exemple.

1. Si $z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$, alors z^4 est un nombre réel.
2. Si $z + \overline{z} = 0$, alors $z = 0$.
3. Si $z + \dfrac{1}{z} = 0$, alors $z = i$ ou $z = -i$.
4. Si $|z| = 1$ et si $|z + z'| = 1$, alors $z' = 0$.

Exercice 2 : (6 points)

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

A tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \dfrac{(3+4i)z + 5\overline{z}}{6}$.

On définit la fonction f par $f(M) = M'$.

1. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1 + 2i$, $z_B = 1$ et $z_C = 3i$.
   Déterminer les affixes des points A', B' et C' images respectives de A, B et C par f.
   Placer les points A, B, C, A', B' et C'.
2. On pose $z = x + iy$, avec x et y réels. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z' en fonction de x et y.
3. Montrer que l'ensemble des points M invariants par f est la droite D d'équation $y = \dfrac{1}{2}x$.
   Tracer D. Que remarque-t-on ?
   (Indication : un point invariant par f, ou point fixe, est un point M tel que $f(M) = M$.)
4. Soit M un point quelconque de la droite D et M' son image par f.
   Montrer que M' appartient à la droite D.