Corrigé : Devoir Maison n°1

Exercice 1 : (4 points)

1. Si $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, alors :

$$\begin{aligned} z^4 &= \left(\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^2\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}i + \frac{i^2}{4}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}i - \frac{1}{4}\right)^2 \\ &= \left(-\frac{1}{2}i\right)^2 \\ &= -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

   Ainsi, $z^4 \in \mathbb{R}$. La proposition 1 est vraie.

2. Si $z + \overline{z} = 0$, alors $z = 0$.
   Cette proposition est fausse. En effet, dans le cas où $z = bi$ avec $b \in \mathbb{R}^*$, $\overline{z} = -bi$ et $z + \overline{z} = 0$ alors que $z \neq 0$.

3. Si $z + \frac{1}{z} = 0$, alors $z = i$ ou $z = -i$.
   Cette proposition est vraie. En effet,
   $z + \frac{1}{z} = 0 \Rightarrow \frac{z^2+1}{z} = 0 \Rightarrow \frac{z^2 - i^2}{z} = 0 \Rightarrow \frac{(z-i)(z+i)}{z} = 0 \Rightarrow z = i$ ou $z = -i$.

   > Ici, 0 est une valeur interdite. Autrement dit, $z \neq 0$.

4. Si $|z| = 1$ et si $|z + z'| = 1$, alors $z' = 0$.
   Cette proposition est fausse. En effet, dans le cas où $z = 1$ et $z' = -2$, $z + z' = -1$.
   Ainsi, $|z| = 1$ et $|z + z'| = 1$. Alors que $z' \neq 0$.

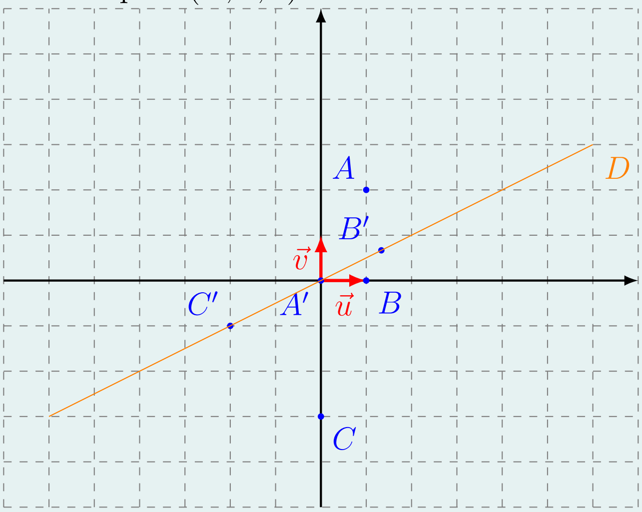
Exercice 2 : (6 points)

A tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' tel que $\quad z' = \frac{(3+4i)z + 5\overline{z}}{6}$.

1. Notons z'_A, z'_B et z'_C les affixes respectives des points A', B' et C'.
   $z'_A = \frac{(3+4i)(1+2i) + 5(1-2i)}{6} = \frac{3 + 6i + 4i - 8 + 5 - 10i}{6} = 0.$
   $z'_B = \frac{(3+4i) \times 1 + 5 \times 1}{6} = \frac{8+4i}{6} = 0 = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}i.$
   $z'_C = \frac{(3+4i)(3i) + 5(-3i)}{6} = \frac{9i - 12 - 15i}{6} = \frac{-12-6i}{6} = -2 - i.$

Exercice 2 : (suite)

Ci-après les points placés sur un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.



1. On pose $z = x + iy$, avec x et y réels. On alors,

$$z' = \frac{(3+4i)(x+iy)+5(x-iy)}{6} = \frac{3x+3yi+4xi-4y+5x-5yi}{6} = \frac{8x-4y+i(4x-2y)}{6}.$$

Ainsi, $Re(z') = \dfrac{4x-2y}{3}$ et $Im(z') = \dfrac{2x-y}{3}$.

2. Pour déterminer l'ensemble des points M invariants par f, il suffit de résoudre l'équation $z = \dfrac{(3+4i)z+5\overline{z}}{6}$. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} z = \frac{(3+4i)z+5\overline{z}}{6} \quad &\Leftrightarrow \quad x+iy = \frac{4x-2y}{3} + i\frac{2x-y}{3} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{4x-2y}{3} \\ y = \dfrac{2x-y}{3} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad y = \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, la droite D d'équation $y = \dfrac{1}{2}x$ représente l'ensemble des points invariants de f.

On remarque que les points A', B' et C' appartiennent à la droite D. Ils sont donc alignés.

3. Soit M un point quelconque de la droite D d'affixe $z = x + iy$. On a alors, $z = x + \dfrac{x}{2}i$.

Et, $z' = \dfrac{(3+4i)\left(x+\frac{x}{2}i\right)+5\left(x-\frac{x}{2}i\right)}{6} = \dfrac{3x+\frac{3x}{2}+4xi-2x+5x-\frac{5x}{2}i}{6} = \dfrac{6x+3xi}{6} = z.$

Ainsi, M' appartient bel et bien à la droite D.